

初二数学寒假班基础教案

目录

第一讲 一次函数的概念.....	2
第二讲 一次函数的图像与性质.....	3
第三讲 一次函数的应用.....	5
第四讲 一次函数的复习.....	7
第六次 整式方程.....	10
第七讲 分式方程.....	14
第八讲 无理方程.....	16
第九讲 分式方程和无理方程的解法.....	18
第十讲 二元二次方程组.....	21
第十一讲 代数方程复习.....	24
第十二讲 新学期初态考复习.....	26

第一讲 一次函数的概念

一次函数概念

①一般地，形如 $y = kx + b$ (k 、 b 是常数，且 $k \neq 0$) 的函数叫做一次函数。

②一次函数 $y = kx + b$ 的定义域是一切实数。

③一次函数与正比例函数关系：

当 $b=0$ 时， $y = kx + b \Rightarrow y = kx$ (k 是常数，且 $k \neq 0$)。

④一般地，我们把函数 $y = c$ (c 是常数) 叫做常值函数。

例 1：根据变量 x 、 y 的关系式，判断 y 是否是 x 的一次函数。

- (1) $y = 2x$ () (2) $y = 1 - \frac{1}{2}x$ () (3) $x - \frac{1}{3}y = \sqrt{2}$ ()
 (4) $5x - 7y = 0$ () (5) $y = \frac{2}{x} + 3$ () (6) $y = \frac{1}{2}(x-5)$ ()
 (7) $y = \sqrt{x} + 1$ () (8) $y = x^2 + 1$ ()
 (9) $y = kx + 1$ () (10) $y = 1$ ()

例 2：(1) 已知变量 x 、 y 之间的关系式是 $y = (a+1)x + a$ (其中 a 是常数)，那么 y 是 x 的一次函数吗？

过程：

(2) $y = (a+1)x + a - 2$ 是一次函数，则 a _____过程：

$y = (a+1)x + a - 2$ 是正比例函数，则 a _____。过程：

(3) $y = (a-5)x + (b-3)$ 是一次函数，则 a _____ b _____

$y = (a-5)x + (b-3)$ 是正比例函数，则 a _____ b _____

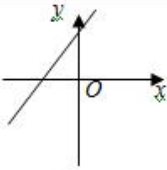
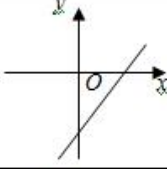
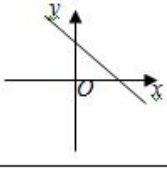
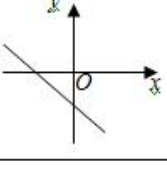
例 3：已知一个一次函数，当自变量 $x=3$ 时，函数值 $y=5$ ；当 $x=2$ 时， $y=2$ 。(1) 求这个函数的解析式。(2) 求当 $x=1.5$ 时， y 的值；(3) 求当 $y=1$ 时， x 的值。

第二讲 一次函数的图像与性质

一般来说，一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 具有以下性质：

$k > 0 \Leftrightarrow$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大.

$k < 0 \Leftrightarrow$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小.

一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的性质			
$k > 0$	$b > 0$		经过 第一、二、三象限
	$b < 0$		经过 第一、三、四象限
$k < 0$	$b > 0$		经过 第一、二、四象限
	$b < 0$		经过 第二、三、四象限

1、已知一次函数 $y = kx + 2$ 的图像经过点 $A(-1, -1)$

- (1) 求常数 k 的值；
- (2) 当自变量 x 的值逐渐增大时，函数值 y 随之增大还是减小？

2、已知一次函数 $y = (1 - 2m)x + m + 1$ ，函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小.

- (1) 求 m 的取值范围；
- (2) 在直角平面坐标系中，这个函数的图像与 y 轴的交点 M 位于 y 轴的正半轴还是负半轴？

3、已知一次函数 $y = -\frac{2}{3}x + m$ 的图像经过点 $A(-1, a)$ 和点 $B(1, b)$ ，试比较 a 与 b 的大小.

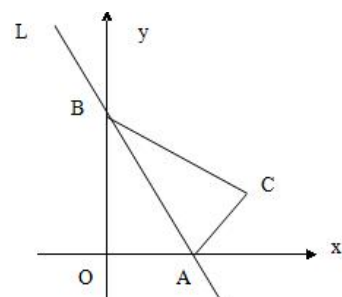
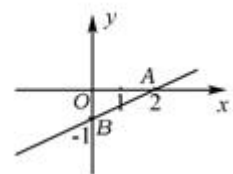
- 4、 (1) 直线 $y = 2x + 5$ 经过第_____象限；
 (2) 直线 $y = x - 3$ 经过第_____象限；
 (3) 直线 $y = -2x + 8$ 经过第_____象限；
 (4) 直线 $y = -4x - 5$ 经过第_____象限；
 (5) 直线 $y = kx + b$ 经过第二、三、四象限，则 k 、 b 的取值范围是什么？
 (6) 直线 $y = kx + b$ 经过第一、三、四象限，则 k 、 b 的取值范围是什么？
 (7) 直线 $y = kx + b$ 经过第一、二、四象限，则 k 、 b 的取值范围是什么？
 (8) 直线 $y = kx + b$ 经过第一、二、三象限，则 k 、 b 的取值范围是什么？

巩固练习

- 1、一次函数 $y = 2x$ 的图像是由 $y = 2x - 2$ 向_____平移_____单位得到的。
 2、如果 $y = 3x + 3k - 2$ 的图像经过原点，那么 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 3、已知一个一次函数的图像经过点 $(0, 3)$ ，且与直线 $y = 2x$ 平行，则此一次函数关系式为_____。
 4、直线 $y = x + 1$ 与直线 $y = 2x - 2$ 的交点坐标是_____。
 5、一次函数 $y = kx + b$ 中， y 随 x 的增大而减小，且 $kb > 0$ ，则它的图像一定不经过第_____象限。
 6、某一次函数图像过点 $(-1, 5)$ ，且函数 y 的值随自变量 x 的值的增大而减小，请你写出一个符合上述条件的函数表达式_____。
 7、已知函数 $y = \frac{3}{4}x - 1$ ，如果函数值 $y > 2$ ，那么相应的自变量 x 的取值范围是_____。
 8、直线 $y = kx + b$ 过点 $(2, -1)$ ，且与直线 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 相交于 y 轴上同一点，则其函数表达式为_____。

- 9、如图，一次函数 $y = ax + b$ 的图像经过 A 、 B 两点，
 则关于 x 的不等式 $ax + b < 0$ 的解集是_____。

- 10、如图，直线 $l: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B ， $\triangle AOB$ 与 $\triangle ACB$ 关于直线 l 对称，则点 C 的坐标为_____



第三讲 一次函数的应用

例 1: 某市为鼓励居民节约用水和加强对节水的管理, 制定了以下每月每户用水的收费标准:

- ①若用水量不超过 8 立方米, 每立方米收费 0.8 元, 并加收每立方米 0.2 元的污水处理费;
- ②用水量超过 8 立方米时, 在①的基础上, 超过 8 立方米的部分, 按每立方米收费 1.6 元, 并加收每立方米 0.4 元的污水处理费.

(1) 请分别算出用水量为 6 立方米和 10 立方米时, 应交水费。

(2) 设某户一个月的用水量为 x 立方米, 应交水费为 y 元, 试分别对①②两种情况, 写出 y 关于 x 的函数解析式, 并指出函数的定义域.

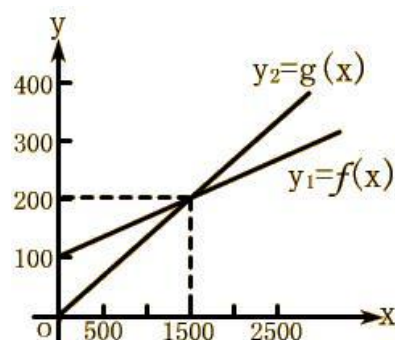
(3) 若某用户某月所交水费为 26 元, 则该居民用户该月的用水量是多少吨?

例 2: 据报道, 某地区从 1995 年底开始, 每年增加的沙漠面积几乎相同, 1998 年底该地区的沙漠面积约为 100.6 万公顷, 2001 年底扩展到 101.2 万公顷, 如果不进行有效治理, 试估计到 2020 年该地区的沙漠面积.

例 3: 已知某汽车邮箱中的剩余油量 y (升) 与该汽车行驶里数 x (千米) 是一次函数关系。当汽车加满油后, 行驶 200 千米, 油箱中还剩油 126 升; 行驶 250 千米, 油箱中还剩油 120 升. 这辆汽车加满油最多能行驶多少千米?

例 4: 某公司急需用车, 但暂时无力购买, 于是准备与出租车公司签订租车合同。以每月行驶 x 千米计算, 甲出租车公司的月租费用是 y_1 元, 乙出租车公司的月租费用是 y_2 元, 如果

$y_1 = f(x)$ 、 $y_2 = g(x)$, 这两个函数的图像如图所示, 那么:



- (1) 每月行驶_____路程时, 两家公司的租车费用相同?
- (2) 每月行驶_____路程时, 租用甲公司的车合算?
- (3) 如果每月用车的路程约为 2300 千米, 那么租用_____公司的车合算?

例 5: 已知弹簧在一定限度内, 它的长度 y (厘米) 与所挂重物质量 x (千克) 是一次函数关系

试一试: 如果经过测量, 不挂重物时弹簧长度为 6(厘米), 挂上 2.5 千克重物时弹簧长度为 7.5(厘米), 那么弹簧长度 y (厘米) 与所挂重物质量 x (千克) 的函数解析式是_____.如果挂了一个重物时量出弹簧长度为 7(厘米), 那么这个重物的质量是_____。

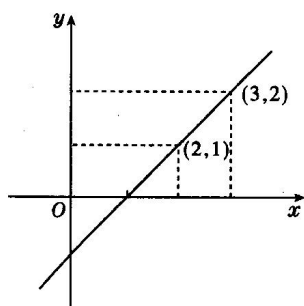
过程:

第四讲 一次函数的复习

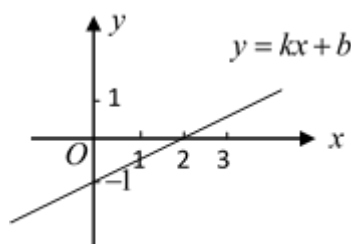
一、选择题

1. 如下左图是一次函数 $y=kx+b$ 的图象，当 $y<2$ 时， x 的取值范围是（ ）

- A. $x<1$ B. $x>1$ C. $x<3$ D. $x>3$

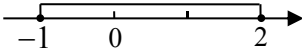
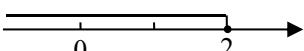
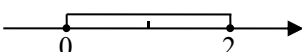
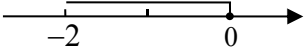


第 1 题



第 2 题

2. 如图是关于 x 的函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象，则不等式 $kx+b \leq 0$ 的解集在数轴上可表示为（ ）

- A.  B. 
 C.  D. 

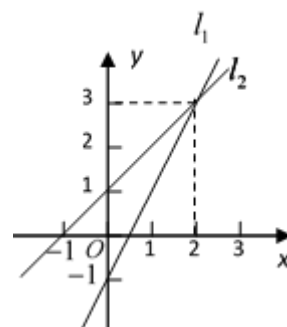
3. 如图，以两条直线 l_1 , l_2 的交点坐标为解的方程组是（ ）

- A. $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x-y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

4. 若直线 $x+2y=2m$ 与直线 $2x+y=2m+3$ (m 为常数) 的交

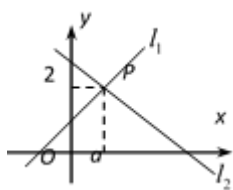
点在第四象限，则整数 m 的值为()

- A. $-3, -2, -1, 0$ B. $-2, -1, 0, 1$
 C. $-1, 0, 1, 2$ D. $0, 1, 2, 3$

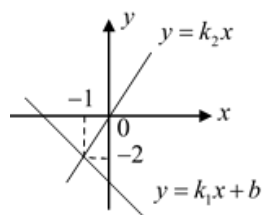


二、填空题

1. 如图，直线 $l_1: y=x+1$ 与直线 $l_2: y=mx+n$ 相交于点 $P(a, 2)$ ，则关于 x 的不等式 $x+1 \geq mx+n$ 的解集为_____.



第 1 题



第 2 题

2. 直线 $l_1: y = k_1x + b$ 与直线 $l_2: y = k_2x$ 在同一平面直角坐标系中的图象如图所示, 则关于 x 的不等式 $k_2x > k_1x + b$ 的解集为_____.

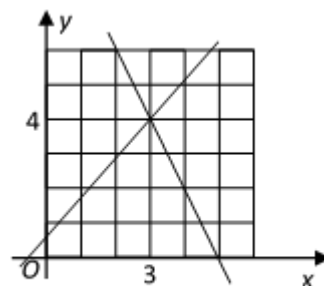
3. 已知一次函数 $y = ax + b$ (a 、 b 是常数), x 与 y 的部分对应值如下表:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	-2	-4

那么方程 $ax + b = 0$ 的解是_____; 不等式 $ax + b > 0$ 的解集是_____.

4. 如图所示的是函数 $y = kx + b$ 与 $y = mx + n$ 的图象, 求方程组

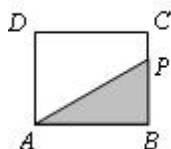
$\begin{cases} y = kx + b \\ y = mx + n \end{cases}$ 的解关于原点对称的点的坐标是_____.



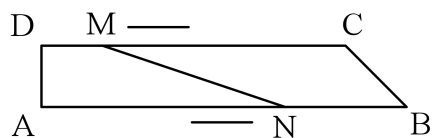
三、解答题

1. 已知直线 $l_1: y = -4x + 5$ 和直线 $l_2: y = \frac{1}{2}x - 4$, 求两条直线 l_1 和 l_2 的交点坐标, 并判断该交点落在平面直角坐标系的哪一个象限上.

2. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 动点 P 从点 B 出发, 沿 BC , CD , DA 运动至点 A 停止. 设点 P 运动的路程为 x , $AB=6$, $BC=4$, $\triangle ABP$ 的面积为 y , 试求: y 关于 x 的函数关系, 并画出函数图象。



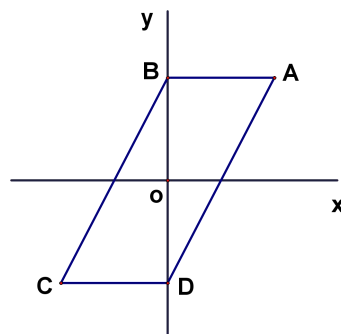
3. 如图，在直角梯形 ABCD 中， $DC \parallel AB$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 28\text{cm}$ ， $DC = 24\text{cm}$ ， $AD = 4\text{cm}$ ，点 M 从点 D 出发，以 1cm/s 的速度向点 C 运动，点 N 从点 B 同时出发，以 2cm/s 的速度向点 A 运动，当其中一个动点到达端点停止运动时，另一个动点也随之停止运动. 请画出四边形 ANMD 的面积 $y (\text{cm}^2)$ 与两动点运动的时间 $t (\text{s})$ 的函数图象。



4. 如图：在平面直角坐标系内，平行四边形 ABCD 的边 $AB \parallel x$ 轴，点 B、D 在 y 轴上，且 B 点坐标为 $(0, 1)$ ，A、D 在直线 $y = 2x - 1$ 上

求：(1) 点 A、C、D 的坐标

(2) 求平行四边形 ABCD 的面积



5. 反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图像和一次函数 $y = kx - 7$ 的图像都经过点 P $(m, 2)$ 。

(1) 试求一次函数的解析式；

(2) 如果等腰梯形 ABCD 的顶点 A、B 在一次函数的图像上，顶点 C、D 在反比例函数的图像上，两底 AD、BC 与 y 轴平行，且点 A 和点 B 的横坐标分别为 a 和 a+2，求 a 的值。

第六次 整式方程

知识点 1: 含有字母系数的方程

如果方程中只有一个未知数且两边都是关于未知数的整式, 那么这个方程叫做一元整式方程.

一元整式方程中含有未知数的项的最高次数是 n (n 是正整数), 那么这个方程叫做一元 n 次方程; 其中次数 n 大于 2 的方程统称为一元高次方程, 简称高次方程.

例题 1: $ax = 12(a \neq 0)$ 是含有字母系数的一元一次整式方程, 其中 x 是未知数, a 是字母系数.

例题 2: $ax^2 + x + c = 0$ 是含有字母系数的一元二次整式方程, 其中 x 是未知数, a 、 c 是字母系数.

知识点 2: 解含有字母系数的一元一次整式方程、一元二次整式方程.

解含有字母系数的一元一次整式方程、一元二次整式方程要讲清何时讨论, 怎样讨论, 分几种情形讨论.

例题 1: 解关于 x 的方程

$$1. 3x = b \quad 2. bx = 3 \quad 3. 3x^2 = a^2 \quad 4. 3x^2 = a + 1$$

$$5. (ax)^2 + 4x^2 = 1 \quad 6. a^2x + x = 1$$

$$7. ax + b^2 = bx + a^2 (a \neq b) \quad 8. bx^2 = 2S (b > 0, S > 0);$$

$$9. (3a - 2)x = 2(3 - x) \quad 10. bx^2 - 1 = 1 - x^2 (b \neq -1)$$

知识点 3: 二项方程

如果一元 n 次方程的一边只有含未知数的一项和非零的常数项, 另一边是零, 那么这样的方程叫做二项方程.

关于 x 的一元 n 次二项方程的一般形式为: $ax^n + b = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, n 是正整数)

怎样判断一元 $n(n > 2)$ 次二项方程, 怎样解一元 $n(n > 2)$ 次二项方程?

例题 1: $\frac{1}{2}x^5 - 16 = 0$, $5x^3 + 118 = 0$, $2x^4 - 3 = 0$, $x^6 + 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x^2 - 1 = 0$ 都是一元二项方程.

说明 1: $x^3 = 0$, $x^2 = 0$ 不是一元二项方程.

说明 2: 解一元 $n(n > 2)$ 次二项方程, 可以转化为求一个已知数的 n 次方根, 如果在实数范围内, 这个数的 n 次方根存在, 那么这个一元 $n(n > 2)$ 次二项方程的根也可以求出来.

说明 3: 对于二项方程 $ax^n + b = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$,

当 n 为奇数时, 方程有只有一个实数根.

当 n 为偶数时, 如果 $ab < 0$, 那么方程有两个实数根, 且两个根互为相反数;

如果 $ab > 0$, 那么方程没有实数根.

【练习】

例 1、解下列关于 x 的方程

$$(1) \frac{3}{2}ax - x = 0.6(3 - \frac{5}{3}x)$$

$$(2) a^2x^2 - 1 = 1 - x^2$$

例 2、下列关于 x 的方程, 哪些是整式方程? 这些整式方程分别是一元几次方程?

$$(1) \frac{3}{2}x - x = 0.6(3 - \frac{5}{3}x^3) \quad (2) a^3x^2 - 4x = 12 \quad (3) x^2 - \frac{2}{3}x = 1$$

$$(4) \frac{2}{a^2}x^2 - 1 = 1 - x \quad (5) \frac{3}{2a}x - x = 0.6(3 - \frac{5}{3}x^3) \quad (6) x^2 - 4ax = 12$$

$$(7) \frac{x^2 - 4ax}{a} = 1 \quad (8) x^2 - 1 = \frac{1 - x^2}{3x} \quad (9) \frac{x^2 - 4ax}{a} = 1 - x^5 \quad (10) x^2 - 1 = 1 - x^{-1}$$

例 3、已知关于 x 的方程 $mx^2 + 2(m+1)x + m = 1$ 有实数根，求 m 的取值范围。

例 4、判断下列方程是否是二项方程：

$$(1) \frac{3}{2}x^3 = 0.6(3 - \frac{5}{3}a)$$

$$(2) x^2 - 4x = 0$$

$$(3) x^4 - \frac{2}{3}x = 1$$

$$(4) x^{12} - 1 = \frac{72}{73}$$

例 5、解下列关于 x 的方程

$$(1) -\frac{3}{2}x^3 = \frac{4}{9}$$

$$(2) x^4 - 256 = 0$$

$$(3) x^6 = -1$$

$$(4) 2x^2 = \frac{72}{73}$$

$$(5) -3(x-1)^3 = 192$$

$$(6) (x-3)^4 - 625 = 0$$

例 6、解下列关于 x 的方程

$$(1) x^4 - 6x^2 - 7 = 0$$

$$(2) 2x^4 - 5x^2 - 18 = 0$$

$$(3) \quad x^4 + 14x^2 + 33 = 0$$

$$(4) \quad 2x^6 + 5x^3 + 2 = 0$$

$$(5) \quad x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$$

$$(6) \quad x^3 - 6x^2 - 5x = 0$$

第七讲 分式方程

【知识点】

分式方程

1. 解分式方程的基本思想是：将分式方程化为整式方程，领会分式方程“整式化”的化归思想.
2. 解分式方程产生增根的原因是：一是未知数的允许取值的范围扩大了，二是解法不妥当造成的.
3. 解分式方程必须进行检验，检验的方法是代入最简公分母或代入原方程.
4. 解分式方程的一般步骤：
开始→去分母→解整式方程→检验→（是）写出原方程的根→结束。
↓ →（否）→↑
5. 用换元法解分式方程.

【练习】

1. 在下列方程中，关于 x 的分式方程的个数（ a 为常数）有（ ）

① $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 4 = 0$ ② $\frac{x}{a} = 4$ ③ $\frac{x-1}{a} + \frac{x-1}{a} = 2$ ④ $\frac{x^2-9}{x+3} = 1$; ⑤ $\frac{1}{x+2} = 6$;

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

2. 方程 $\frac{1}{1-x^2} + \frac{5}{x+1} = \frac{3}{1-x}$ 的根是（ ）

A. $x=1$ B. $x=-1$ C. $x=\frac{3}{8}$ D. $x=2$

3. $1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$, 那么 $\frac{2}{x}$ 的值是（ ）

A. 2 B. 1 C. -2 D. -1

4. 下列分式方程去分母后所得结果正确的是（ ）

A. $\frac{1}{x-1} = \frac{x+2}{x+1} - 1$ 去分母得, $x+1 = (x-1)(x+2) - 1$;

B. $\frac{x}{2x-5} + \frac{5}{5-2x} = 1$, 去分母得, $x+5 = 2x-5$;

C. $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$, 去分母得, $(x-2)^2 - x+2 = x(x+2)$;

D. $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1}$, 去分母得, $2(x-1) = x+3$;

二、填空题

5. 满足方程: $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-2}$ 的 x 的值是_____.

6. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{1+x}{5+x}$ 的值等于 $\frac{1}{2}$.

7. 分式方程 $\frac{x^2 - 2x}{x - 2} = 0$ 的增根是.

8. 一汽车从甲地开往乙地, 每小时行驶 v_1 千米, t 小时可到达, 如果每小时多行驶 v_2 千米, 那么可提前到达_____小时.

9. 农机厂职工到距工厂 15 千米的某地检修农机, 一部分人骑自行车先走 40 分钟后, 其余人乘汽车出发, 结果他们同时到达, 已知汽车速度为自行车速度的 3 倍, 若设自行车的速度为 x 千米/时, 则所列方程为.

三、解答题

10. 解下列方程

$$(1) \frac{1}{x-3} + 2 = \frac{4-x}{3-x} \quad (2) \frac{4}{x^2-4} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{x-1}{x+2} \quad (3) \frac{x}{x-2} - 1 = \frac{1}{x^2-4}.$$

11. 有一项工程, 若甲队单独做, 恰好在规定日期完成, 若乙队单独做要超过规定日期 3 天完成; 现在先由甲、乙两队合做 2 天后, 剩下的工程再由乙队单独做, 也刚好在规定日期完成, 问规定日期多少天?

第八讲 无理方程

【知识点】

知识点 1: 有理方程：整式方程和分式方程统称为有理方程。

知识点 2: 无理方程：方程中含有根式，且被开方数是含有未知数的代数式，这样的方程叫做无理方程。

例题 1. 在下列关于 x 的方程中，无理方程有_____（填编号）。

$$(1) \frac{x}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{x-1} = 1 \quad (2) \sqrt{2}x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0 \quad (3) \sqrt{x-2} = 2$$

$$(4) \sqrt[3]{x^2+2} = 1+x \quad (5) \sqrt{x+1} = -1 \quad (6) -\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$$

$$(7) \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 0 \quad (8) x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$$

知识点 3: 代数方程：有理方程和无理方程统称为初等代数方程（简称为代数方程）。

【练习】

$$1、\sqrt{5x} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1}$$

$$2、3x^2 - 6x - 2\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 4 = 0$$

$$3、已知 \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{y}(\sqrt{x} + 5\sqrt{y}) \quad (xy \neq 0), 求 \frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y} 的值$$

4、已知 a 是非零整数，且 $\begin{cases} 4(a+1) > 2a+1 \\ 5-2a > 1+a \end{cases}$ ，试解关于 x 的方程

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+3} = 3a$$

5、我市向民族地区的某县赠送一批计算机，首批 270 台将于近期启运，经与某物流公司联系，得知用 A 型汽车若干辆刚好装完，用 B 型汽车不仅可以少用 1 辆，而且有一辆车差 30 台计算机才装满。

(1) 已知 B 型汽车比 A 型汽车每辆可多装 15 台，求 A、B 两种型号的汽车各能装计算机多少台？

(2) 已知 A 型汽车的运费是每辆 350 元，B 型汽车的运费是每辆 400 元，若运送这批计算机，同时用这两种型号的汽车，其中 B 型汽车比 A 型汽车多用 1 辆，所用运费比单独用任何一种型号的汽车都要节省，按这种方案，需 A、B 两种型号汽车各多少辆？运费多少元？

第九讲 分式方程和无理方程的解法

知识点复习:

一、分式方程:

(1) 去分母解分式方程的步骤:

①把各分式的分母因式分解; ②在方程两边同乘以各分式的最简公分母; ③去括号, 把所有项都移到左边, 合并同类项; ④解一元二次方程; ⑤验根.

(2) 验根的基本方法是代入原方程进行检验, 但代入原方程计算量较大. 而分式方程可能产生的增根, 就是使分式方程的分母为 0 的根. 因此我们只要检验一元二次方程的根, 是否使分式方程两边同乘的各分式的最简公分母为 0. 若为 0, 即为增根; 若不为 0, 即为原方程的解.

二、无理方程

(1) 含未知数的二次根式恰有一个的无理方程的一般步骤:

①移项, 使方程的左边只保留含未知数的二次根式, 其余各项均移到方程的右边; ②两边同时平方, 得到一个整式方程; ③解整式方程; ④验根.

(2) 含未知数的二次根式恰有两个的无理方程的一般步骤:

①移项, 使方程的左边只保留一个含未知数的二次根式; ②两边平方, 得到含未知数的二次根式恰有一个的无理方程; ③一下步骤同例 4 的说明.

【例 1】解方程 $\frac{1}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = 1$.

【例 2】解方程 $(\frac{x^2}{x-1})^2 - \frac{3x^2}{x-1} - 4 = 0$

【例 3】解方程 $\frac{8(x^2+2x)}{x^2-1} + \frac{3(x^2-1)}{x^2+2x} = 11$.

【例 4】解方程 $\sqrt{x+7} - x = 1$

【例 5】解方程 $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+3} = 3$

【例 6】解方程 $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$

练习题 A 组

1. 解下列方程：

$$(1) \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-5}{(x-2)(x-3)} \quad (2) \frac{x}{2x^2-11x-21} = \frac{x+7}{x^2-12x+35}$$

$$(3) \frac{2}{y^2-4} = \frac{1}{y+2} - 1 \quad (4) \frac{15}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} = 1$$

2. 用换元法解方程： $x^2 + \frac{4}{x^2} = 4$

3. 解下列方程：

$$(1) \sqrt{x+2} = -x$$

$$(2) \sqrt{x-5} + x = 7$$

$$(3) \sqrt{x+3} - 2 = x$$

4. 解下列方程:

$$(1) \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+4} + 1$$

$$(2) \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$$

5. 用换元法解下列方程:

$$(1) x - 12 + \sqrt{x} = 0$$

$$(2) x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x} = 6$$

练习题 B 组

1. 解下列方程:

$$(1) \frac{2x-5}{x^2-3x+2} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$$

$$(2) \frac{x-4}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{x-6}{x^2-4}$$

$$(3) \frac{1}{x+7} = \frac{x+1}{(2x-1)(x+7)} + \frac{1}{2x^2-3x+1}$$

$$(4) \frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1} = 0$$

2. 用换元法解下列方程:

$$(1) \frac{x^2-5x}{x+1} + \frac{24(x+1)}{x(x-5)} + 14 = 0$$

$$(2) \frac{2(x^2+1)}{x+1} + \frac{6(x+1)}{x^2+1} = 7$$

$$(3) \frac{x^4+2x^2+1}{x^2} + \frac{x^2+1}{x} = 2$$

3. 若 $x=1$ 是方程 $\frac{x}{x+a} + \frac{1}{x-a} = 4$ 的解, 试求 a 的值.

4. 解下列方程:

$$(1) \frac{3}{x^2-2x-3} = 2x^2-4x-1$$

$$(2) \frac{3x}{x-a} + \frac{6x^2}{a^2-x^2} = \frac{a-x}{x+a}$$

5. 解下列方程:

$$(1) x^2 + \sqrt{x^2-1} = 3$$

$$(2) \sqrt{x+10} - \frac{6}{\sqrt{x+10}} = 5$$

$$(3) 2x^2 - 4x + 3\sqrt{x^2-2x+6} = 15$$

第十讲 二元二次方程组

【知识点】

知识点：二元二次方程：仅含有两个未知数，并且含有未知数的项的最高次数是2的整式方程，叫做二元二次方程。

关于 x 、 y 的二元二次方程的一般形式是： $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

(a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 都是常数，且 a 、 b 、 c 中至少有一个不为零，当 b 为零时， a 与 d 以及 c 与 e 分别不全为零)。

其中 ax^2 、 bxy 、 cy^2 叫做这个方程的二次项， a 、 b 、 c 分别叫做二次项的系数；

dx 、 ey 叫做这个方程的一次项， d 、 e 分别叫做一次项的系数， f 叫做这个方程的常数项。

说明：任何一个二元一次方程有无数个解，但是任何一个二元二次方程的解不一定是无数个。

例题 1：任何一个二元一次方程有_____个实数解；方程 $3x + 4y = 25$ 有_____个实数解；

方程 $3x + 4y = 25$ 的正整数解是_____。

例题 2：方程 $x^2 + y^2 = 13$ 有_____个实数解；方程 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$ 有_____个实数解；

方程 $x^2 + y^2 + 1 = 0$ 有_____个实数解。

知识点：仅含有两个未知数，各方程是整式方程，并且含有未知数的项的最高次数为2，这样的方程组叫做二元二次方程组。

例题 1：在下列方程中，二元二次方程组是_____ (填编号)。

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2x + 3y + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2xy - 2x - 4y - 1 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad (7) \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

例题 2：将二元二次方程 $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ 化为两个一次方程为_____。

例题 3：二元二次方程 $(2x-3)(y+5) = 0$ 有_____个解。

知识点：解二元二次方程组的方法.

1. 会用代入消元法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组.

2. 会用代入因式分解法解由特殊的两个二元二次方程组成的方程组.

说明：由两个二元二次方程组成的方程组中，至少能找到一个用因式分解法将其化为两个二元一次方程. 这样可将原方程组化为由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组或化成四个由两个二元一次方程组成的方程组.

【练习】

一、填空题：

1、方程组 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ 的解是。

2、方程组 $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ 的解是。

3、解方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ (x - 2y)(x - 3y) = 0 \end{cases}$ 时可先化为和两个方程组。

4、方程组 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$ 的解是。

5、方程组 $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ 的两组解为 $\begin{cases} x_1 = a_1 \\ y_1 = b_1 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2 = a_2 \\ y_2 = b_2 \end{cases}$ ，则 $a_1 a_2 - b_1 b_2 =$ 。

二、选择题：

1、由方程组 $\begin{cases} x - y = 1 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 4 = 0 \end{cases}$ 消去 y 后得到的方程是 ()

A、 $2x^2 - 2x - 3 = 0$

B、 $2x^2 - 2x + 5 = 0$

C、 $2x^2 + 2x + 1 = 0$

D、 $2x^2 + 2x + 9 = 0$

2、方程组 $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x^2 + x + y - 3 = 0 \end{cases}$ 解的情况是 ()

A、有两组相同的实数解

B、有两组不同的实数解

C、没有实数解

D、不能确定

3、方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y - x - m = 0 \end{cases}$ 有唯一解，则 m 的值是 ()

A、 $\sqrt{2}$

B、 $-\sqrt{2}$

C、 $\pm\sqrt{2}$

D、以上答案都不对

4、方程组 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + m \end{cases}$ 有两组不同的实数解，则 ()

- A、 $m \geq -\frac{1}{4}$ B、 $m > -\frac{1}{4}$ C、 $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$ D、以上答案都不对

三、解下列方程组：

1、 $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - y^2 = 15 \end{cases}$ 2、 $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

3、 $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 1 \\ 2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0 \end{cases}$

第十一讲 代数方程复习

一、填空题

1、用换元法解方程 $\frac{3x}{2x-1} - \frac{4x-2}{x} + 1 = 0$ ，适合设 _____ = y, 那么原方程可化为关于 y 的分式方程为 _____。

2、用换元法解方程 $\frac{2x^2}{x+2} + \frac{x+2}{x^2} = 3$ ，适合设 _____ = y, 那么原方程可化为关于 y 的整式方程为 _____。

3、解分式方程 $4x^2 - 2x + \frac{2}{2x^2 - x + 2} = 1$ ，宜用 _____ 法来解，并且设 _____ = y 较为合适。

4、用换元法解方程组
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 5, \\ \frac{3}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases}$$
 时，如果设 _____ = u, _____ = v, 那么原方程可化为二元一次方程组是 _____。

5、方程 $x + \frac{1}{x} = 3\frac{1}{3}$ 的根是 _____。

6、若方程 $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{k^2}{4-x^2}$ 有增根，则 k = _____。

7、方程 $\frac{2y^2 - 6y}{y-3} = y + 5$ 的实根的个数为 _____。

8、若分式 $\frac{4x}{2x-1}$ 与分式 $\frac{x-2}{2x+1}$ 的值互为倒数，则 x = _____。

9、若分式方程 $\frac{2x-1}{a+x} = \frac{2}{x}$ 有一个根为 2，那么 a = _____。

二、解方程

1、 $\sqrt{x+2} = -x$

2、 $2x + \sqrt{x+1} - 1 = 0$

$$3、\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$$

$$4、x^2+8x+\sqrt{x^2+8x-11}=23$$

$$5、\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+2}=1$$

$$6、\frac{9x-7}{3x-2}+\frac{4x-5}{3-2x}=1$$

$$7、\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-2\left(\frac{x}{x+1}\right)-8=0$$

$$8、\begin{cases} \frac{2}{x-2}-\frac{3}{y+2}=5 \\ \frac{2}{x-2}-\frac{2}{y+2}=4 \end{cases}$$

三、解答题

$$1、\text{已知：}|5x-3y-16|+\sqrt{x^2-y^2-16}=0，\text{求 } x、y \text{ 的值。}$$

$$2、m \text{ 取何值时，方程组 } \begin{cases} x^2+2y^2=6 \\ mx+y=3 \end{cases} \text{ 有两个相等的实数解？}$$

第十二讲 新学期初态考复习

一、填空题

- 下列函数中：(1) $y = 2x + 1$ ，(2) $y = \frac{1}{x} + 1$ ，(3) $y = -x$ ，(4) $y = kx + b$ (k 、 b 是常数)，
一次函数有（填序号）.
- 已知直线 $y = kx + x$ 是一次函数，则 k 的取值范围是.
- 直线 $y = 2x - 4$ 的截距是 .
- 已知函数 $y = -3x - 1$ ， y 随着 x 的增大而 .
- 若直线 $y = 2x + 1$ 向下平移 n 个单位后，所得的直线在 y 轴上的截距是 -3 ，则 n 的值是 _____.
- 已知直线 $y = x - m + 3$ 图像经过第一、三、四象限，则 m 的取值范围是_____.
- 已知点 $A(a, 2)$ ， $B(b, 4)$ 在直线 $y = x - 5$ 上，则 a 、 b 的大小关系是 a b .
- 某市为鼓励市民节约用水和加强对节水的管理，制订了以下每月每户用水的收费标准：(1) 用水量不超过 $8m^3$ 时，每立方米收费 1 元；(2) 超出 $8m^3$ 时，在 (1) 的基础上，超过 $8m^3$ 的部分，每立方米收费 2 元. 设某户一个月的用水量为 $x m^3$ ，应交水费 y 元. 则当 $x > 8$ 时， y 关于 x 的函数解析式是.
- 八边形的内角和是度.
- 已知 $\square ABCD$ 中，已 $\angle A : \angle D = 3 : 2$ ，则 $\angle C =$ 度.
- 如图， AC 是 $\square ABCD$ 的对角线，点 E 、 F 在 AC 上，要使四边形 $BFDE$ 是平行四边形，还需要增加的一个条件是(只要填写一种情况).
- 菱形的两对角线长分别为 10 和 24，则它的面积为.
- 填空： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} =$.
- 如图，正方形 $ABCD$ 中， E 在 BC 上， $BE=2$ ， $CE=1$. 点 P 在 BD 上，则 PE 与 PC 的和的最小值为.

二、选择题

- 已知直线 $y = x - 3$ ，在此直线上且位于 x 轴的上方的点，它们的横坐标的取值范围是 ()
(A) $x \geq 3$ ； (B) $x \leq 3$ ； (C) $x > 3$ ； (D) $x < 3$.

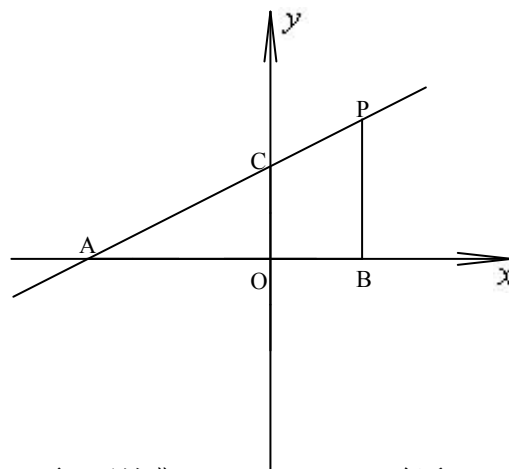
16. 已知一次函数的图像不经过三象限, 则 k 、 b 的符号是 ()
 (A) $k < 0$, $b \geq 0$; (B) $k < 0$, $b \leq 0$; (C) $k < 0$, $b > 0$; (D) $k < 0$, $b < 0$.
17. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 下列结论中不正确的 ()
 (A) 当 $AB=BC$ 时, 它是菱形; (B) 当 $AC \perp BD$ 时, 它是菱形;
 (C) 当 $\angle ABC=90^\circ$ 时, 它是矩形; (D) 当 $AC=BD$ 时, 它是正方形.
18. 如图, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=3\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$, 现将纸片折叠压平, 使 A 与 C 重合, 如果设折痕为 EF , 那么重叠部分 $\triangle AEF$ 的面积等于 ()
 (A) $\frac{73}{8}$; (B) $\frac{75}{8}$; (C) $\frac{73}{16}$; (D) $\frac{75}{16}$.

三、解答题:

19. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图像平行于直线 $y = -3x$, 且经过点 $(2, -3)$.
 (1) 求这个一次函数的解析式; (2) 当 $y=6$ 时, 求 x 的值.

20. 已知一次函数图像经过点 $A(-2, -2)$ 、 $B(0, -4)$.
 (1) 求 k 、 b 的值; (2) 求这个一次函数与两坐标轴所围成的面积.

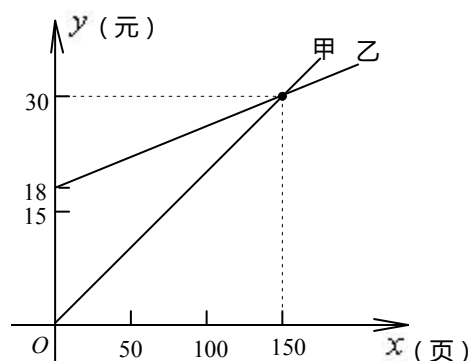
21. 若直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 C 两点, 点 P 是该直线上在第一象限内的一点, $PB \perp x$ 轴, B 为垂足, 且 $S_{\triangle ABC} = 6$.
 (1) 求点 B 和 P 的坐标. (2) 过点 B 画出直线 $BQ \parallel AP$, 交 y 轴于点 Q , 并直接写出点 Q 的坐标.



22. 某人因需要经常去复印资料, 甲复印社按 A_4 纸每 10 页 2 元计费, 乙复印社按 A_4 纸每 10 页 1 元计费, 但需按月付一定数额的承包费. 两复 (第21题图) 印社每

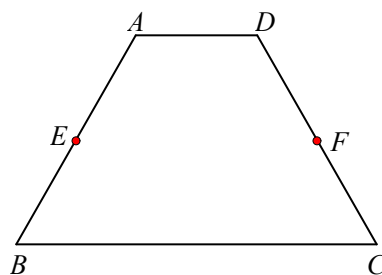
月收费情况如图所示，根据图中提供的信息解答下列问题：

- (1) 乙复印社要求客户每月支付的承包费是元.
- (2) 当每月复印页时，两复印社实际收费相同.
- (3) 如果每月复印页在 250 页左右时，
应选择哪一个复印社?请简单说明理由.



(第22题图)

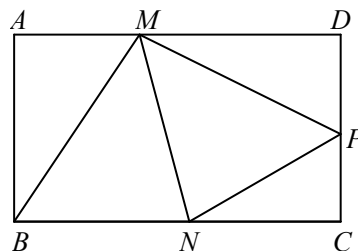
23. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC = 8$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $BC = 12$ ．若 E 、 F 分别是 AB 、 DC 的中点，联结 EF ，求线段 EF 的长.



(第23题图)

24. 已知：如图，矩形纸片 $ABCD$ 的边 $AD=3$ ， $CD=2$ ，点 P 是边 CD 上的一个动点（不与点 C 重合），把这张矩形纸片折叠，使点 B 落在点 P 的位置上，折痕交边 AD 与点 M ，折痕交边 BC 于点 N .

- (1) 写出图中的全等三角形. 设 $CP=x$ ， $AM=y$ ，写出 y 与 x 的函数关系式；
- (2) 试判断 $\angle BMP$ 是否可能等于 90° ．如果可能，请求出此时 CP 的长；如果不可能，请说明理由.



(第27题图)