高一数学精练题集

目录

第 1 讲　集合及其运算

【知识梳理】

1. 学习目标：准确掌握集合的概念，熟练运用集合的表示方法，掌握集合关系
2. 学习重点和难点：集合的表示重点
3. 学习目标：熟练掌握集合的交、并、补运算
4. 学习重点和难点：区分“或”与“且”

【精练题集】

一、集合概念

1、用列举法表示下列集合：

(1) 集合 $\{x \mid y = x^2 - 1, |x| \le 2, x \in Z\}$ ＿＿＿＿＿＿＿

(2) 集合 $\{(x, y) \mid y = x^2 - 1, |x| \le 2, x \in Z\}$ ＿＿＿＿＿＿＿

2、用描述法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解集 ＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$ 的解集 ＿＿＿＿＿＿＿

3、非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足：

①对任意的 $a, b \in G$，都有 $a \oplus b \in G$；

②存在 $e \in G$，使得对一切 $a \in G$，都有 $a \oplus e = e \oplus a = a$，则称 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”．

现给出下列集合和运算：

①G＝{非负整数}，$\oplus$ 为整数的加法；

②G＝{偶数}，$\oplus$ 为整数的乘法；

③G＝{平面向量}，$\oplus$ 为平面向量的加法．

集合 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”的是＿＿＿＿＿＿＿＿．

4、已知全集 $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，集合 A 是集合 U 的恰有两个元素的子集，且满足下列三个条件：

（1）若 $a_1 \in A$，则 $a_2 \in A$

（2）若 a_1 不属于 A，则 a_2 不属于 A

（3）若 $a_3 \in A$,则 a_4 不属于 A

则集合 A=＿＿＿＿＿＿＿（用列举法表示）

5、集合 $P = \{x \mid y = \sqrt{x+1}\}$，集合 $Q = \{y \mid y = \sqrt{x-1}\}$，则 P 与 Q 的关系是(　　)

A. $P = Q$　　　　B. $P \supsetneqq Q$

C. $P \subsetneqq Q$　　　　D. $P \cap Q = \varnothing$

二、空集

6、给出下列关系：(1) $0 = \varnothing$；(2) $0 \in \varnothing$；(3) $0 \subseteq \{\varnothing\}$；(4) $0 \in \{\varnothing\}$；(5) $\{0\} = \varnothing$；(6) $\varnothing \subseteq \{0\}$；(7) $\varnothing \in \{\varnothing\}$；(8) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$；其中正确的关系的序号是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

7、已知集合 $A = \{x \in R \mid ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in R\}$，若 A 中元素至多有 1 个，则 a 的取值范围是＿＿＿＿＿．

三、集合的关系

8、设x，$y\in R$，集合$\mathrm{A}=\{x, y, x+y\}$，$\mathrm{B}=\{0, x^2, xy\}$，若$\mathrm{A}=\mathrm{B}$，则$x=$______，$y=$______.

9、设集合$\mathrm{A}=\{x\,|\,|x|\le 2, x\in \mathrm{R}\}$，$\mathrm{B}=\{x\,|\,x\ge a\}$．若$\mathrm{A}\subseteq \mathrm{B}$，则实数$a$的取值范围是______________.

10、集合$M=\{x\,|\,x=\dfrac{kx}{2}+\dfrac{\pi}{4}, k\in \mathrm{Z}\}$，$N=\{x\,|\,x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathrm{Z}\}$，则（　　）

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

11、若规定E=$\left\{a_{1,}a_2\ldots a_{10}\right\}$的子集$\left\{a_{k_1}a_{k_2}\ldots,a_{k_n}\right\}$为E的第k个子集，其中k=$2^{k_1}+2^{k_2-1}+\cdots+2^{k_n-1}$，则

（1）$\left\{a_{1,},a_3\right\}$是E的第____个子集；

（2）E的第211个子集是_______

四、集合的个数

12、已知集合$A=\{x\,|\,x^2-3x+2=0，x\in \mathrm{R}\}$，$B=\{x\,|\,0<x<5，x\in \mathrm{N}\}$，则满足条件$A\subseteq C\subseteq B$的集合$C$的个数为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

五、集合的运算

13、集合$A=\left\{x\middle|x^2-3x+2=0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2+2(a+1)x+(a^2-5)=0\right\}$

（1）若$A\cap B=\{2\}$，求实数a的值；

（2）　若$A\cup B=A$，求实数a的取值范围。

14、已知集合$A=\left\{x\middle|x\le -2或x\ge 3\right\}$，$B=\left\{x\middle|\ 3a<x<a+1\right\}$，若$A\cap B=B$，求实数$a$的取值范围是__________________.

15. 已知集合$A=\left\{x\middle|x^2-ax+a^2-19=0,a为常数\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-5x+6=0\right\}$，

$C=\left\{x\left|x^2+2x-8=0\right.\right\}$，求当实数$a$为何值时，$A\cap B\neq\varnothing$与$A\cap C=\varnothing$同时成立.

16、设集合$A=\{x\,|\,x^2+(p+2)x+1=0,x\in R\}$，若$A\bigcap R^+=\varnothing$. 求实数 p 的取范围

17、已知集合：

$A=\{(x,y)\,|\,ax+y=1\},B=\{(x,y)\,|\,x+ay=1\},C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$问

（1）当a取何值时，$(A\bigcup B)\bigcap C$为含有两个元素的集合？

（2）当a取何值时，$(A\bigcup B)\bigcap C$为含有三个元素的集合？

18. 已 知 $I=\{(x,y)\,|\,x,y\in R\}$ ， $A=\{(x,y)\,|\,\dfrac{y-4}{x-2}=3\}$ ， $B=\{(x,y)\,|\,y=3x-2\}$ ， 则 $C_uA\cap B$=________________________.

六、计数原理的应用

19、 集合 *A*，*B*，*C* 是 *I*={1，2，3，4，5，6，7，8，9，0}的子集，（1）若$A\bigcup B=I$，求有序集合对（*A*，*B*）的个数；（2）求 *I* 的非空真子集的个数。

20、集合$M=\{1,2,\cdots,2008\}$，若$X\subseteq M$，$X\neq\varnothing$，a_x为X中最大数与最小数的和（若集合X中只有一个元素，则此元素既为最大数，又为最小数），那么，对M的所有非空子集，全部a_x的平均值为__________________________

第 2 讲 命题及充要条件

【知识梳理】

1、记忆性水平的要求：了解一些基本的逻辑关系及其运用，了解集合与命题之间的联系，

体会逻辑语言在数学表达和试证中的作用.

2、解析性理解水平：⑴理解逆命题、否命题、逆否命题，明确命题的四种形式及相互关系，

建立集合与命题之间的联系，领会分类、判断、推理的思想方法；

⑵理解充分条件、必要条件、充分必要条件的意义，能在简单的问题情景中判断条件的充分性、必要性、充分必要性.

【精练题集】

1．判断命题的真假：

（1）能被 5 整除的个位数字是 5； _________

（2）凡等腰三角形都相似； _________

（3）方程 $ax+1=x+2$ 有唯一解； ________

（4）两个实数的和为无理数，那么这两个数中至少有一个是无理数。 _________

（5）集合 A 是集合 $A\bigcup B$ 或 $A\bigcap B$ 的子集； _________

2．写出命题“两个偶数的和是偶数”的逆命题、否命题、逆否命题。

逆命题：______________________________ _________

否命题：_____________________________ _________

逆否命题：. __________________ __________ _________

3、填写下列命题的否定形式

①$3+4>6$：________________； ②2 是质数；_____________；

③他是数学家或物理学家：_________；

④若 $ab=0,$ 则 a,b 中至少有一个为零:_________________

4．求证：对于给定实数 $a,a\neq 0$ 且 $a\neq 1,$ 则经过函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$ (其中 $x\in R,x\neq\dfrac{1}{a}$) 图像上任意两个不同点的直线不平行于 x 轴；

5. 填空(在“充分非必要”、“必要非充分”、“充分且必要”、“既非充分又非必要” 中选一种作答)

⑴对于实数 $x,y,p:xy>1,x+y>2$ 是 $q:x>1,y>1$ 的______________条件；

⑵对于实数$x,y,p:x+y\neq 8$是$q:x\neq 2$或$y\neq 6$的______________条件；

⑶设$x,y\in R$,则$x^2+y^2<2$的______________条件是：$|x|<\sqrt{2},|y|<\sqrt{2}$；

6、⑴是否存在实数m，使得$2x+m<0$是$x^2-2x-3>0$的充分条件？

⑵是否存在实数m，使得$2x+m<0$是$x^2-2x-3>0$的必要条件？

7、(2013 上海春) 已知$a,b,c\in R$,“$b^2-4ac<0$” 是“函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图像恒在x轴上方” 的 (　　)

(A)充分非必要条件　　(B)必要非充分条件

(C)充要条件　　(D)既非充分又非必要条件

8、(2013 上海理) 钱大姐常说“便宜没好货”，她这句话的意思是：“不便宜”是“好货”的 (　　)

(A)充分条件　　(B)必要条件

(C)充要条件　　(D)既非充分又非必要条件

9、设集合$A=|x|x>-1|,B=|x||x|\geq 1|$，则“x∈A 且 x 不属于 B”成立的充要条件是（　　）

A、-1<x≤1　　B、x≤1　　C、x>-1　　D、-1<x<1

10、如果命题“p或q” 为假命题，则下列命题中正确的是 (　　)

(A) p,q中至少有一个为真命题　　(B) p,q均为真命题

(C) p,q均为假命题　　(D) p,q中至多有一个为真命题

11、下列各组中的两个命题互为等价命题是 (　　)

(A)“$x\in A$” 与“$x\in A\bigcup B$”　　(B)“$A\subseteq B$”与“$A\bigcup B=B$”

(C)“$a\in A\bigcap B$” 与 “$a\in B$”　　(D)“$m\in A\bigcap B$”与“$m\in A\bigcup B$”

12、已知抛物线$C:y=-x^2+mx-1$,点$M(0,3),N(3,0)$,求抛物线C和线段MN有两个不同交点的(充要)条件

13、已知α：$x\geq 1$或$x\leq -5$，β：$x\geq -2m+1$或$x\leq 2m-3(m\in R)$，若α是β的充分条件，求 m 的取值范围

14、用反证法证明：不存在整数 m,n 使得 $m^2=n^2+2014$

第 3 讲　不等式的基本性质

【知识梳理】

1、解析性理解水平： 理解用两个实数差的符号规实数大小的意义，建立不等式研究的基础. 通过类比研究等式的性质得到不等式的基本性质，并能加以证明.

2、探究性理解水平： 会用不等式的基本性质判断不等关系和用比较法证明简单不等式.

【精练题集】

1、填空题：

（1）已知 a,b 为非零实数，且 $a<b$, 则 $\dfrac{1}{ab^2}$ ____ $\dfrac{1}{a^2b}$；（填“>” 或“<”）

（2）下列四个不等式：⑴ $a<0<b$;⑵ $b<a<0$;⑶ $b<0<a$;⑷ $0<b<a$;；

其中能使 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ 成立的充分条件有________________

（3）已知 $f(n)=\sqrt{n^2+1}-n, g(n)=n-\sqrt{n^2-1}, \phi(n)=2n\left(n\in N^*, n\ge 2\right)$,

则 $f(n), g(n), \phi(n)$ 大小关系是________________________________

（4）若 $0<\dfrac{b}{a}<\dfrac{d}{c}$，则 $\dfrac{a}{a+b}$ ________ $\dfrac{c}{c+d}$；

（5）若 $a,b\in R, a>|b|$，那么 a^n ______ $b^n\left(n\in N^*, n\ge 2\right)$

（6）若 $x<0, xy<0$, 则 $|y-x+1|-|x-y-5|$ 的值是________________ .

2、若 $1\le a\le b+c<a+1$ 且 $b\le c$, 比较 a 与 b 的大小

3、设 $a>0, b>0, a>\dfrac{1}{x}>-b$, 写出与之关于 x 的等价不等式.

4、已知$a>b>0,m>0,$试比较$\dfrac{b+m}{a+m}$与$\dfrac{b}{a}$的大小.

5、已知$a,b\in R,$试比较a^4-b^4与$4a^3\left(a-b\right)$的大小.

6、已知△ABC的三边长分别为a,b,c，且满足$b+c\le 3a$，则$\dfrac{c}{a}$的取值范围为（　　　）

A、（1，+∞）　B、（0，2）　C、（1，3）　D、（0，3）

7、设$f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}\left(x_1\ne x_2\right),$试比较$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|$与$\left|x_1-x_2\right|$的大小

8、设$20<a<34,24<b<60,$求$a+b,a-b,\dfrac{a}{b}$的取值范围

9、设$f\left(x\right)=ax^2+bx,$且$1\le f\left(-1\right)\le 2,2\le f\left(1\right)\le 4,$求$f\left(-2\right)$的取值范围

10、设$a>0$且$a\approx\sqrt{2},b=1+\dfrac{1}{1+a}.$　⑴证明：$\sqrt{2}$介于a,b之间；

⑵求a,b中哪一个更接近于$\sqrt{2}$；⑶你能设计一个比b更接近$\sqrt{2}$的c吗？并说明理由.

第 4 讲　一元二次不等式的解法

【知识梳理】

1、学习目标：熟练掌握一元二次不等式的解法

2、学习重点：解一元二次不等式

【精练题集】

1.不等式 $x^2-3x+2<0$ 的解集为(　　)

A.(－∞，－2)∪(－1，＋∞)　B.(－2，－1)

C.(－∞，1)∪(2，＋∞)　　　D.(1，2)

2．已知集合 $A=\{x||x|\leqslant 2，x\in R\}$，$B=\{x|4x-x^2>0，x\in Z\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　)

A.(1，2)　B.[1，2]　C.(1，2]　D.{1，2}

3．若关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是(　　)

A.(－1，1)　B.(－2，2)　C.(－∞，－2)∪(2，＋∞)　D.(－∞，－1)∪(1，＋∞)

4.解不等式（1）　$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$　　　（2）$\dfrac{2x+1}{x-3}>\dfrac{2x+1}{3x-2}$

5、关于 x 的不等式 $x^2-3kx+k^2+k<0$ 的解集含元素 2，则 k 的取值范围是___________.

6、已知关于 x 的不等式 $x^2-ax+b>0$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$ 则 a=________，b=_________

7、已知不等式组 $\begin{cases}-1<x<3\\(x+1)(x-a-1)<0\end{cases}$ 的解集为（-1,3），求 a 的取值范围

8、（1）若不等式 $2x^2-2(a+1)x+a+3>0$ 的解集为 R，求实数 a 的取值范围。

（2）若关于 x 的二次函数 $y=2kx^2+kx-\dfrac{3}{8}$ 的图像全在 x 轴下方，求实数 k 的取值范围。

9、已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为($\dfrac{1}{2}$,2)，求关于 x 的不等式 $cx^2-bx+a\leq 0$ 的解集

10、设 $A=\{x \mid x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x \mid x^2+ax+b\le 0\}$，若 $A\cup B=R,\ A\cap B=(3,4]$，求 a、b 的值。

11. 设不等式 $x^2-2ax+a+2\leqslant 0$ 的解集为 M，如果 $M\subseteq[1,4]$，求实数 a 的取值范围.

12. 解关于 x 的不等式 $ax^2-(2a+1)x+2<0$.

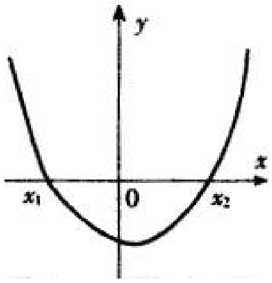
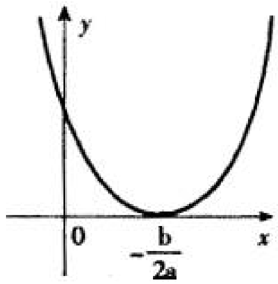
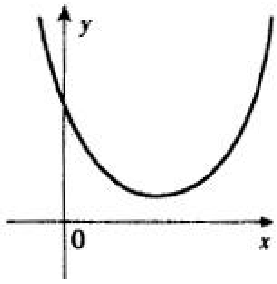
13、求解一元二次不等式组 $\begin{cases}6+x-2x^2>0\\ x^2-(2+a)x+2a>0\end{cases}$

14、要使满足关于 x 的不等式 $2x^2-9x+a<0$（解集非空）的每一个 x 的值至少满足不等式 $x^2+4x+3<0$ 和 $x^2-6x+8<0$ 中的一个，求实数 a 的取值范围。

第 5 讲 其他不等式的解法

【复习回顾】

1、知识回顾

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a$ 的图像			
$ax^2+bx+c=0$ 的根	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c>0$ 的解集	$\{x\mid x<x_1或x>x_2\}$	$\left\{x\middle\vert x\in\mathrm{R}但x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

【知识梳理】

1. 求解含字母系数“一元二次不等式”[1]的三讨论：

（1） 讨论二次项系数是否为零；

（2） 讨论是否有两根；

（3） 讨论两根大小关系；

（4） 最后不能将各结论取并集！

2. 已知含字母系数“一元二次不等式”[2]的解集，求字母系数的取值范围

（1） 讨论二次项系数是否为零；

（2） 二次项系数为零时，代入判断；

（3） 二次项系数不为零时，根据图像位置写出相应不等式组，并求解；

【注】有以下几类问题：

① 已知确定的非 R 非$\varnothing$解集，如解集为$[2,3]$——先判断二次项系数符号，再利用韦达定

理列不等式组；

② 已知解集为 R 或$\varnothing$——先判断二次项系数符号，再利用二次项系数和$\Delta<0$或$\Delta\le 0$列不等式组；

【注】此类问题可有其他的等价描述，如："某不等式恒成立"，"图像恒在 x 轴上方" 等；

③ 已知解集包含某区间，如$[2,3]\subseteq$解集——先判断二次项系数符号，再根据图像利用区间端点函数值的符号列不等式组；【注】关注图像能否经过区间端点

④ 已知解集包含于某区间，如解集$\subseteq[2,3]$——须讨论$\varnothing$，判断二次项系数符号后，再利用Δ、区间端点函数值的符号、对称轴位置三方面列不等式组；【注】关注图像能否经过区间端点；

（4） 每类情况内的结论与分类条件取交集，最后取各讨论情况结论的并集；

3. 高次方程的解法： **数轴标根法.（穿针引线法）**

①将不等式化为$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)>0(<0)$的形式，并将各因式 x 的系数化"+"；

②求根，并在数轴上表示出来；

③由右上方穿线，经过数轴上表示各根的点（为什么）；

④若不等式（x 的系数化"+"后）是"＞0",则找"线"在 x 轴上方的区间；若不等式是"＜0",则找"线"在 x 轴下方的区间.

4、分式不等式的解法：

（1）形如$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$或$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$（其中$f(x)$，$g(x)$为整式且$g(x)\ne 0$）的不等式称为**分式不等式**。

（2）$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$　　　$\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)>0\\ g(x)\ne 0\end{cases}$

5、含绝对值的不等式的解法：

不等式$|x|<a,|x|>a$的解

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
$\|x\|<a$	$-a<x<a$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing$
$\|x\|>a$	$x>a$或$x<-a$	$x\ne 0$	$x\in R$

(1)公式法：即利用$|x|>a$与$|x|<a$的解集求解。

(2)**定义法**:即利用$|a|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$ 去掉绝对值再解

(3)**平方法**:解$|f(x)|>|g(x)|$型不等式。

(4)分类讨论法：即通过合理分类去绝对值后再求解。

(5)几何法：即转化为几何知识求解。

【精练题集】

1.不等式$x^2-3x+2<0$的解集为(　　)

A．$(-\infty，-2)\cup(-1，+\infty)$　B．$(-2，-1)$

C．$(-\infty，1)\cup(2，+\infty)$　　　D．$(1，2)$

2．已知集合$A=\{x||x|\leq 2，x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{x|4x-x^2>0，x\in \mathbf{Z}\}$，则$A\cap B$等于(　　)

A．(1，2)　B．[1，2]　C．(1，2]　D．{1，2}

3．若关于x的方程$x^2+mx+1=0$有两个不相等的实数根，则实数m的取值范围是(　　)

A．$(-1，1)$　B．$(-2，2)$　C．$(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$　D．$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$

4.解不等式（1）　$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$　　　（**2**）$\dfrac{2x+1}{x-3}>\dfrac{2x+1}{3x-2}$

5. 不等式$\left|\dfrac{x+3}{2x-1}\right|\geq 1$的解集是___________________

6. 解不等式$|x-1|+|x+2|<5$。

7.解不等式$\sqrt{3x-4}-\sqrt{x-3}>0$

8.解关于x的不等式：$\dfrac{x-a}{x-a^2}<0$　$(a\in R)$

9、若对$x\in R$，恒有$\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}>m$，其中$m\in N^*$，求$m$的值

10、若$\dfrac{x^2-(a+a^2)x+a^3}{x^2+4x+3}<0$的解集是$\{x|-1<x<9\}$，求实数$a$的值

11.设不等式$x^2-2ax+a+2\leq 0$的解集为M，如果$M\subseteq$［1，4］，求实数a的取值范围.

12．解关于 x 的不等式 $ax^2-(2a+1)x+2<0$.

13 对任何实数 x，若不等式 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为（ ）

(A)k<3　　(B)k<-3　　(C)k≤3　　(D) k≤-3

14．设集合 $A=\{x||x-a|<2\}$，$B=\left\{x\left|\frac{2x-1}{x+2}\le 1\right.\right\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

第 6 讲　基本不等式

【知识点梳理】

①$a,b\in R$，则 $a^2+b^2\ge 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

$a,b\in R^+$，则 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

综上，若 $a,b\in R$，则 $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}\ge 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

*② 若 $a,b\in R^+$，则 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ge\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

*③ $x+\frac{1}{x}\begin{cases}\ge 2 & x>0\text{，当且仅当}x=\frac{1}{x}\text{，即}x=1\text{ 时, 等号成立}\\ \le -2 & x<0\text{，当且仅当}x=\frac{1}{x}\text{，即}x=-1\text{ 时, 等号成立}\end{cases}$

【精练题集】

1.已知 $f(x)=x+\frac{1}{x}-2(x<0)$，则 $f(x)$有(　　)

A．最大值为 0　　B．最小值为 0　　C．最大值为－4　　D．最小值为－4

2.若 $x>0$，$y>0$，且$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，则 $x+y$ 的最小值是(　　)

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

3. “$a=\frac{1}{8}$” 是“对任意的正数 x，$2x+\frac{a}{x}\geqslant 1$” 的(　　)

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

4.已知 $t>0$，则函数 $y=\frac{t^2-4t+1}{t}$的最小值为______.

5. 若正数 x，y 满足 $x+3y=5xy$，则 $3x+4y$ 的最小值是(　　)

A.$\frac{24}{5}$　　B.$\frac{28}{5}$　　C．5　　D．6

6. 今有一台坏天平，两臂长不等，其余均精确，有人要用它称物体的重量，他将物体放在左右托盘各一次，取两次称量结果分别为 a，b.设物体的真实重量为 G，则(　　)

A.$\frac{a+b}{2}=G$　B.$\frac{a+b}{2}\leqslant G$　C.$\frac{a+b}{2}>G$　D.$\sqrt{ab}<G$

7. (1)已知 $x>0$，$y>0$，$x+2y+2xy=8$，则 $x+2y$ 的最小值是　　　(　　)

A．3　　B．4　　C.$\frac{9}{2}$　　D.$\frac{11}{2}$

(2)已知 $a>b>0$，则 $a^2+\frac{16}{b(a-b)}$的最小值是________.

8. 已知 $x>0$，$y>0$，$z>0$，$x-y+2z=0$，则$\frac{xz}{y^2}$的(　　)

A．最小值为 8　　B．最大值为 8

C．最小值为$\frac{1}{8}$　　D．最大值为$\frac{1}{8}$

9．已知二次不等式 $ax^2+2x+b>0$ 的解集为$\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{1}{a}\right\}$且 $a>b$，则$\frac{a^2+b^2}{a-b}$的最小值为(　　)

A．1　B.$\sqrt{2}$　C．2　D．$2\sqrt{2}$

10．已知 $x>0$，$y>0$，且$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，若 $x+2y>m^2+2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，-2)\cup[4，+\infty)$　B．$(-\infty，-4)\cup[2，+\infty)$

C．$(-2，4)$　　D．$(-4，2)$

11. 设 $a>0$，$b>0$，且不等式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{k}{a+b}\geqslant 0$ 恒成立，则实数 k 的最小值等于________.

12. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，求证：

(1)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$；

(2)$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geqslant 9$.

13. (1)已知 a，b 是正常数，$a\neq b$，x，$y\in(0，+\infty)$，求证：$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geqslant\frac{(a+b)^2}{x+y}$，并指出等号成立的条件；

(2)利用(1)的结论求函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}\left(x\in\left(0，\frac{1}{2}\right)\right)$的最小值，并指出取最小值时 x 的值.

14. 设计一幅矩形宣传画，要求画面面积为 4840 平方厘米，画面上下边各要留 8 厘米空白，左右要留 5 厘米空白，怎样确定画面高宽尺寸，才能使宣传画所用纸张面积最小。

15. 已知正数 a 、b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是________

16. 若 $x+2y=1$，则 2^x+4^y 的最小值是____________

【归纳与小结】

1. **基本不等式** $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)基本不等式成立的条件：$\underline{a>0，b>0}$.

(2)等号成立的条件：当且仅当 $\underline{a=b}$ 时取等号.

2. **几个重要的不等式**

(1)$a^2+b^2\geqslant\underline{2ab}(a，b\in\mathbf{R})$．(2)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant\underline{2}$($a$，$b$ 同号)．(3)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a，b\in\mathbf{R})$．(4)$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a，b\in\mathbf{R})$.

3. **算术平均数与几何平均数**

设 $a>0$，$b>0$，则 a，b 的算术平均数为 $\frac{a+b}{2}$，几何平均数为 $\sqrt{ab}$，基本不等式可叙述为：<u>两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数．</u>

4. **利用基本不等式求最值问题**

已知 $x>0$，$y>0$，则

(1)如果积 xy 是定值 p，那么当且仅当 $\underline{x=y}$ 时，$x+y$ 有最<u>小</u>值是 $2\sqrt{p}$.(简记：积定和最小)

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p，那么当且仅当 $\underline{x=y}$ 时，xy 有最<u>大</u>值是 $\frac{p^2}{4}$.(简记：和定积最大)

第 7 讲　不等式的证明

【知识点梳理】

证明不等式常用的数学方法:

(1)比较法 （2）综合法;（3）分析法 (4)反证法;

(5)放缩法;(6)数学归纳法等.

比较法是利用不等式两边的差是正数或负数来证明不等式

综合法证明不等式的逻辑关系. 即 A(已知) $\Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n \Rightarrow$ B(结论). 运用不等式的性质和已证明过的不等式时, 要注意它们各自成立的条件. 这样才能使推理正确, 结论无误.

分析法论证“若 A 则 B”这个命题的模式是:欲证命题 B 为真, 只需证明命题 B_1 为真, 从而又只需证明命题 B_2 为真, 从而又……只需证明命题 A 为真, 今已知 A 真, 故 B 必真. 简写为: $B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \cdots \Leftarrow B_n \Leftarrow A$.

反证法的基本思想是通过否定结论, 导出矛盾, 从而肯定结论;

放缩法:借助不等式的传递性, 要证明 $A \geqslant B$, 只须证得 $A \geqslant C$, $C \geqslant B$ 方可, 或借助其他途径放缩, 如利用函数的单调性证明;

数学归纳法:是证明与自然数有关命题的一种重要的数学方法.

【精练题集】

1. 已知 $0 < a < 1$, 且 $x^2 + y = 0$，求证: $\log_a(a^x + a^y) \le \log_a 2 + \dfrac{1}{8}$

2. 已知 $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$, 求证: $(1-a)b, (1-c)a, (1-b)c$ 不能都大于 $\dfrac{1}{4}$.

3.若 $x, y \in R^+$，证明：$x^3 + y^3 \ge x^2 y + xy^2$

4. 求证：$\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2$

5.用数学归纳法证明下列不等式:

若 $a>0$, $b>0$ 且 $n \in \mathrm{N}^*$, 证明 $\dfrac{a^n + b^n}{2} \ge (\dfrac{a+b}{2})^n$.

6. 当 $n > 2$ 时，求证：$\log_n(n-1)\log_n(n+1) < 1$

7. 已知 $xy>0$, 求证：$xy + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} \geqslant 4$.

8. 若 $a, b, c, d \in R^+$，求证：$1 < \dfrac{a}{a+b+d} + \dfrac{b}{b+c+a} + \dfrac{c}{c+d+b} + \dfrac{d}{d+a+c} < 2$

第 8 讲　函数的概念及解析式

【知识梳理】

1、函数的概念：在一个变化过程中有两个变量 x、y，如果对于 x 在某个实数集 D 内的任意一个值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一确定的值与它对应,那么 y 就叫做 x 的函数,记做 $y=f(x)$,x∈D，x 叫做自变量,x 的取值范围，D 叫做函数的定义域，和 x 值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.

2、对函数概念的理解：

(1)函数的三要素：⑴　对应法则、⑵ 定义域、⑶　值域。

(2)函数的表示方法：⑴解析法、⑵列表法、⑶图像法。

3、求函数的定义域时一般应考虑：　1、问题的实际背景；2、解析式要有意义.

一般地，如果 f（x）是整式,那么函数的定义域是 R;

如果 f（x）是分式,那么函数的定义域是使分母非零的实数的集合;

如果 f（x）是偶次根式,那么函数的定义域是使根号内的式子非负的实数的集合

如果 f（x）是由几个部分的数学式子构成,那么函数的定义域是使每个部分都有意义的实数集合的交集.

4、建立函数关系的基本步骤：

1、分析题意设出两个变量；

2、列出等量关系；

3、等式变形得出函数解析式；

4、根据问题的实际意义给出函数的定义域；

5、两个函数的和、积的定义

（1）两个函数和的定义：一般地，已知两个函数 $y=f\left(x\right)\left(x\in D_1\right), y=g\left(x\right)\left(x\in D_2\right)$，设 $D=D_1\bigcap D_2$，并且 D 不是空集，那么当 $x\in D$ 时，$y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ 都有意义。于是把函数 $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)\ x\in D$ 叫做函数 $y=f\left(x\right)与y=g\left(x\right)$ 的和。

类比两个函数的和的定义，我们也可以求两个函数的积。

（2）两个函数积的定义：

两个函数积的定义：已知两个函数 $y=f\left(x\right)\left(x\in D_1\right), y=g\left(x\right)\left(x\in D_2\right)$，设 $D=D_1\bigcap D_2$，并且 D 不是空集，那么当 $x\in D$ 时，$y=f\left(x\right), y=g\left(x\right)$ 都有意义。于是把函数 $y=f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\ x\in D$ 叫做函数 $y=f\left(x\right)与y=g\left(x\right)$ 的积。

6、(1)确定函数的值域：遵循定义域优先的原则.

(2) 求值域的方法有：观察法、配方法、换元法、不等式法、反解法、判别式法、单调函数法、数形结合法、综合法等。

【精练题集】

（一）求函数的定义域

1．函数 $y=\sqrt{-x^2-3x+10}$ 的定义域是______________。

2．函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{1-x^2}$ 的定义域为________________。

3．已知 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x^2, & -1<x<2 \\ 2x, & x\ge 2 \end{cases}$，则 $f(-3)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)+f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ 的值是____________。

4．函数 $y=\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+a}}$ 的定义域为 M，若 $3\notin M$，则实数 a 的取值范围是______________。

5．若函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2^{x^2+2ax-a}-1}$ 定义域为 $R,$ 则实数 a 的取值范围是__________

6、设 $x\in\left(-1,1\right),$ 则 函数 $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为____________

7、已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{4}{\left|x\right|+2}-1$ 的定义域为 $\left[a,b\right],a,b$ 为整数，值域为 $\left[0,1\right]$，则满足条件的整数对 $\left(a,b\right)$ 共有____________对

（二）求函数值

1、若函数 $f\left(2x+1\right)=x^2-2x,$ 则 $f\left(3\right)=$ ______

2、已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+2 & x<1\\ x^2+ax & x\geq 1\end{cases}$，若 $f\left[f\left(0\right)\right]=4a,$ 则实数 $a=$ ______

3、函数 $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2+x+2}$ 的最小值是__________,最大值是___________

4、函数 $f\left(x\right)=ax^2+2ax+1\left(a>0\right)$ 在区间 $\left[-3,2\right]$ 上的最大值为 4 ,则 $a=$ ______

5、已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 $M,$ 最小值为 m，则 $\dfrac{m}{M}$ 的值为______

6、函数 $f\left(x\right)=x^2+\sqrt{x^2-1}$ 的最小值是_________

（三）求函数的关系式

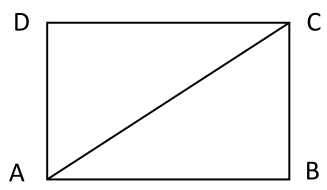
1、设函数 $f(x)=3x,g(x)=\sqrt{2-x}$，则（1）$f(1)+g(1)=$ _________；

（2）$f(x)+g(x)=$ __________

2、设函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2},g(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}}$，求 $f(x)\bullet g(x)=$ __________

3、已知 $f(x)$ 是一次函数，且满足 $3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$，求 $f(x)$。

2．已知：长方形 ABCD 中，AB=4，BC=3，动点 P 从点 A 出发，沿长方形的边运动，经过点 B，点 C，点 D，最后回到 A 点。设点 P 到对角线 AC 的距离为 y，点 P 所经过的路程为 x，求 y 关于 x 的函数关系式，并画出其图像。



3．我国2006年1月1日起，个人所得税法规定：
（1）个人每月的工资薪水收入中，1600元为免税收入，其余部分为应纳税收入；
（2）税率按应纳税收入额规定如下：
问：（1）小明、小强和小红的爸爸每月工资分别为1500元、2500元和3500元，问他们每月应交纳多少个人所得税。
（2）写出纳税额 y 与个人收入 x（x 不超过3600元）的函数关系。

应纳税收入额（元）	税率（%）
[0, 500]	5
(500, 2 000]	10
(2 000, 5 000]	15
(5 000, 20 000]	20
(20 000, 40 000]	25
(40 000, 60 000]	30
(60 000, 80 000]	35
(80 000, 100 000]	40
>100 000	45

课堂练习

1．若函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}, g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{4-x^2}$，则函数 $f(x)+g(x)$ =____________。

2．若函数 $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}, g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+10}}$，则函数 $f(x)g(x)$ =____________。

3．（1）作出函数 $y=2x+\dfrac{1}{x}$ 的大致图像；
（2）作出函数 $y=2x-\dfrac{1}{x}$ 的大致图像。

4．备收人们关注的大型影片《哈里波特》即将在华天影院放映。该影院共有 1000 个座位，票价不分等次，根据该影院的经验：当每张票价不超过 10 元时，票可全部售出；当每张票价高于 10 元时，每提高 1 元，将有 30 张票不能售出。为了获得更好的收益，须给影院定一个合适的票价，符号的基本条件是：（1）为方便找零和算帐，票价定为 1 元的整数倍；（2）票价不得高于 25 元；（3）影院放映一场电影的成本费用支出为 5750 元，票房收入必须高于成本支出，用 x（元）表示每张票价，用 y（元）表示给影院放映一场电影的净收入（除去成本费用后的收入）。把 y 表示为 x 的函数，并求其定义域。

课后作业

一、填空题

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}x-3,(x\geq 10)\\ f(f(x+5)),(x<10)\end{cases}$，则 $f(5)$ 的值为__________。

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+5x-1, & x\leq 3\\ |x-1|, & x>3\end{cases}$，则 $f(x)\leq 1$ 的解集为______________。

3．某中学的高一学生进行野外生存训练，从甲地步行到乙地。已知甲乙两地相距 32 千米，在前 3 小时内学生们每小时走 4 千米，随后以每小时 5 千米的速度一直走到乙地。则他们离

开甲地的距离为 s（千米）与所用时间 t（时）的函数关系式为__________________。

4．某地区住宅电话费收费标准为：接通后 3 分钟内（含 3 分钟）收费 0.20 元，以后每分钟（不足一分钟按一分钟计）收费 0.10 元，如果一次通话 t 分钟，则通话费 y（元）关于通话

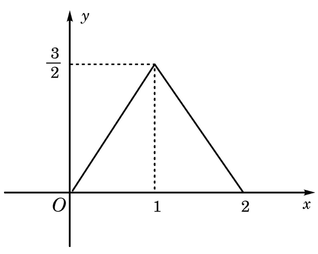
时间 t（分钟）的函数关系式是__________________。

5．对于 $a,b\in R$，若 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a, & a\geq b\\ b, & a<b\end{cases}$，将函数 $f(x)=\max\{|x+1|,|x-2|\}$，$x\in R$ 写成

分段函数为 $f(x)$ =__________________。

二、选择题

6．图中的图象所表示的函数的解析式为（　　）

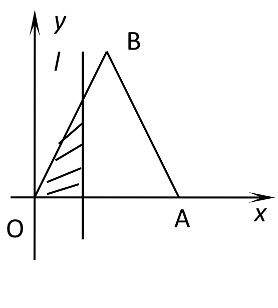


(A) $y=\frac{3}{2}|x-1|$　(0≤x≤2)　　(B) $y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}|x-1|$　(0≤x≤2)

(C) $y=\frac{3}{2}-|x-1|$　(0≤x≤2)　　(D) $y=1-|x-1|$　(0≤x≤2)

三、解答题

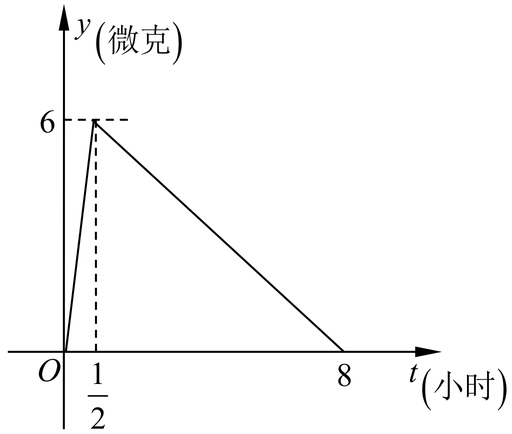
7．如图，△OAB 是边长为 2 的正三角形，这个三角形在直线 $l:x=t(0\leq t\leq 2)$ 的左方被截得图形的面积为 S，求函数 $S=f(t)$ 的解析式及定义域.



8．某医药研究所开发一种新药，如果成人按规定的剂量服用，据监测，服药后每毫升血液中的含药量 y 与时间 t 之间近似满足如图所示的直线段：

(1) 写出服药后 y 与 t 之间的函数关系式；

(2) 据测定：每毫升血液中含药量不少于 4 微克时治疗疾病有效，假若某病人一天中第一次服药时间为 $7:00$，求一天中第三次服药的最佳时间。



第 9 讲 函数的奇偶性

【知识梳理】

㈠　函数奇偶性

1、函数奇偶性的定义：一般地，对于函数 $f\left(x\right)$

（1）如果对于定义域 D 内的任意 x，都有 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，那么函数 $f\left(x\right)$ 叫做偶函数。

（2）如果对于定义域 D 内的任意 x，都有 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，那么函数 $f\left(x\right)$ 叫做奇函数。2、函数奇偶性的图像性质特征：

（1）若函数 $y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 是偶函数，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像是关于 y 轴对称图形。

反之也成立：$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 的图像是关于 y 轴对称，则函数 $y=f\left(x\right)$ 是偶函数

（2）若函数 $y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 是奇函数，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于原点对称图形。

反之也成立：$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 的图像是关于原点对称，则函数 $y=f\left(x\right)$ 是奇函数

3、判断函数 y=f(x)的奇偶性方法：

（1）奇偶性的定义；　　　　　　　（2）函数图像的对称性；

4、判断函数奇偶性的基本步骤.

（1）先判断定义域　　　　　　　　（2）$f\left(-x\right)$ 和 $f\left(x\right)$)的关系；

【精练题集】

(一）奇偶函数定义

1、若 $f\left(x\right)$ 为奇函数，则 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=$ ________

2、若 $f\left(x\right)$ 为偶函数，则 $f\left(\sqrt{2}+1\right)-f\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\right)=$ ________ ；

3、已知 $f\left(x\right)=ax^2+bx+3a+b$ 为偶函数，且定义域为 $\left[a-1,2a\right]$, 则 $a=$ ____, $b=$ ____

4、若 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}+a$ 是奇函数，则实数 $a=$ ________.

5、若 $f\left(x\right)$ 是 R 上的奇函数，则函数 $y=f\left(2x-1\right)+1$ 的图像必过定点 ________

6、已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x<0$ 时， $f(x)=x^2+ax\ (a\in R)$ ，且 $f(2)=6$ ，则 $a=$ ______.

7、设 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的函数，当 $x\geq 0$ 时， $f\left(x\right)=x^2-2x,$ 当 $f\left(x\right)$ 为奇函数时， $f\left(x\right)$ 的解析式是 ____________, 当 $f\left(x\right)$ 为偶函数时， $f\left(x\right)$ 的解析式是 ____________,

（二）如何判断函数的奇偶性

8、判断下列函数的奇偶性

（1） $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}};$

（2） $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\left|x+2\right|-2};$

（3） $f\left(x\right)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right);$

（4） $f\left(x\right)=\begin{cases}x\left(1-x\right) & x<0\\ x\left(1+x\right) & x>0\end{cases};$

（5） $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1};$

（三）函数的奇偶性的应用

9、已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$ ，且 $f(-2)=10$ ，那么 $f(2)$ 的值为 ________

10、 下面四个结论中，正确命题的个数是（　　）

①偶函数的图象一定与 y 轴相交　②奇函数的图象一定通过原点

③偶函数的图象关于 y 轴对称　④既是奇函数，又是偶函数的函数一定是 $f(x)=0(x\in R)$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

11、若 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，$x>0$ 时，$f(x)$ 为增函数．若 $x_1<0,x_2>0$ ，且 $|x_1|<|x_2|$ ，则（　　）

A．$f(-x_1)>f(-x_2)$　　　　B．$f(-x_1)<f(-x_2)$

C．$-f(x_1)>f(-x_2)$　　　　D． $-f(x_1)<f(-x_2)$

12、直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$ 有四个交点，则 a 的取值范围是 （　　　）

A． $(1,+\infty)$　　B． $(0,1)$　　C． $(1,\frac{5}{4})$　　D． $(-\infty,\frac{5}{4})$

13、设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数， $g(x)$ 是 R 上的偶函数，若函数 $f(x)+g(x)$ 的值域为 $[1,3)$ ，则 $f(x)-g(x)$ 的值域为____________.

14、设 a 为非零实数，偶函数 $f(x)=x^2+a|x-m|+1\,(x\in R)$ 在区间 $(2,3)$ 上存在唯一零点，则实数 a 的取值范围是____________.

15、设 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，并且在 $(-\infty,0]$ 上为增函数，
若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$ 成立，则实数 a 的取值范围是____________.

16、已知 $f(x)$ 是偶函数， $g(x)$ 是奇函数，且 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$ $(x\neq\pm1)$ ，则 $g(x)=$ ____________。

课堂练习

1、 奇函数 $f(x)$ 定义域是 $(t,2t+3)$, 则 $t=$ _______ ,

2、 已知 $f(x)$ 为 R 上奇函数，$x\in(0,+\infty)$ 时， $f(x)=x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$, 则 $f(x)$ 的解析式为_____

3、 已知 $f(x)$ 为偶函数，$x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x+\frac{4}{x}$, 当 $x\in[-3,-1]$ 时，记 $f(x)$ 的最大值为 m，最小值为 n, 则 $m-n=$ _______ ,

4、 已知 $f(x),g(x)$ 为 R 上奇函数，已知 $f(x)>0$ 的解集为为 (a^2,b), $g(x)>0$ 的解集为为 $\left(\frac{a^2}{2},\frac{b}{2}\right)$ (其中 $b>2a^2$), 则 $f(x)g(x)>0$ 解集是__________,

5、 已知 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数且 $f(1)=1$, 若 $g(x)=f(x)+2$, 则 $g(-1)=$ _______

6、 已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=f(x)$ 恒成立，且 $f(-1)=7$, 则 $f(7)=$ _______

7、 已知函数 $f(x)$ 对一切 $x,y\in R$, 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

（1）求证： $f(x)$ 为奇函数

（2）若 $f(-3)=a$, 用 a 表示 $f(12)$

8、 已知函数 $y=f(x)=\frac{bx+c}{ax^2+1}\left(a,c\in R,a>0,b\text{为自然数}\right)$ 是奇函数， $f(x)$ 有最大值 $\frac{1}{2}$ ，且 $f(1)>\frac{2}{5}$. （1）试求函数 $f(x)$ 的解析式；（2）是否存在直线 l 和 $y=f(x)$ 的图像相交于 P,Q 两点, 并且使得 P,Q 两点的中点为 $(1,0)$ 点，若存在求出直线 l 的方程；若不存在, 说明理由.

第 10 讲　函数的单调性

【知识梳理】

1．单调增函数的定义：

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I\subseteq A$．

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调递增函数，I 称为 $y=f(x)$ 的单调递增区间.；

2．单调减函数的定义：

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，区间 $I\subseteq A$．

如果对于区间 I 内的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调递减函数，I 称为 $y=f(x)$ 的单调递减区间.

3．函数单调性证明的步骤：

（1）设区间 I 内任意 $x_1,x_2,$且$x_1<x_2$；

（2） 比较 $f(x_1)$与$f(x_2)$的大小 ；

（3） $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow$ 增函数 ；　　$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow$ 减函数 ；

(4)写结论：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 I 上单调递增（减）。.

【精练题集】

1、函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的单调减区间是_______________________。

2、函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$（$a>0$）的单调增区间为____________________；

单调减区间为__________________。

3、若 $f\left(x\right)=kx^2-4x+8$ 在 $\left[5,20\right]$ 上单调递减，则实数 k 的取值范围是____________

4、若 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，又 $f(-2)=0$，则 $x\cdot f(x)<0$ 的解集为_________.

5、函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是_________.

6、若 $f\left(x\right)=\dfrac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $\left(-2,+\infty\right)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是____________

7、若函数 $f(x)=a|x-b|+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a、b 应满足_________________.

8、若 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 都是 R 上的增函数，则下列命题中正确的是____________

(1) $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 与 $f\left(x\right)g\left(x\right)$ 都是增函数;

(2) $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 为增函数及 $f\left(x\right)g\left(x\right)$ 增减性无法确定;

(3) $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 增减性无法确定及 $f\left(x\right)g\left(x\right)$ 为增函数;

(4) $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 与 $f\left(x\right)g\left(x\right)$ 增减性均无法确定

9、若函数 $f(x)=\begin{cases}(2a-1)x+7a-2 & (x<1)\\ a^x & (x\geq 1)\end{cases}$ 在 R 上单调递减，则实数 a 的取值范围是______.

10、“$a=1$”是“函数 $f(x)=\left|x-a\right|$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数”的_________条件。

11、定义在 R 上的偶函数 $f\left(x\right)$ 偶函数满足：对任意的 $x_1,x_2\in\left[0,+\infty\right)\left(x_1\neq x_2\right)$，

有 $\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}<0.$ 则　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

$(A)\ \ f(3)<f(-2)<f(1)$　　　　　　　　$(B)\ \ f(1)<f(-2)<f(3)$

$(C)\ \ f(-2)<f(1)<f(3)$　　　　　　　　$(D)\ \ f(3)<f(1)<f(-2)$

12、若 $f(x)$ 都是 R 上的增函数，对于实数 $a,b,$ 若 $a+b>0,$ 则(　　)

$(A)\ \ f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$　　　　$(B)\ \ f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$

$(C)\ \ f(a)-f(b)>f(-a)-f(-b)$　　　　$(D)\ \ f(a)-f(b)<f(-a)-f(-b)$

13、定义域为 R 的函数 $f(x)=ax^2+b|x|+c\ (a\neq 0)$ 有四个单调区间，则实数 a,b,c 满（　）

$A.\ b^2-4ac>0$ 且 $a>0$　　$B.\ b^2-4ac>0$　　$C.\ -\dfrac{b}{2a}>0$　　$D.\ -\dfrac{b}{2a}<0$

14、12、已知函数 $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$；

（1）求出函数 $f(x)$ 的对称中心；　（2）证明：函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为减函数；

（3）是否存在负数 x_0，使得 $f(x_0)=3^{x_0}$ 成立，若存在求出 x_0；若不存在，请说明理由。

15、（1）定义两种运算：$a\oplus b=\sqrt{a^2-b^2},a*b=\sqrt{(a-b)^2}$，试判断 $f(x)=\dfrac{2\oplus x}{(x*2)-2}$ 的奇偶性；

（2）求函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ 的单调递增区间.

16、（2011 上海理）已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x,$ 其中常数 a,b 满足 $ab\neq 0$。

（1）若 $ab>0,$ 判断函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $ab<0;$ 求 $f(x+1)>f(x)$ 时，x 的取值范围

17、（2012 上海理）已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}(x\neq 0,$ 常数 $a\in R)$。

（1）讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为增函数，求 a 的取值范围。

18. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $x\neq 0$ 的一切实数，对定义域内的任意 m,n 都有 $f(m\cdot n)=f(m)+f(n)$，且当 $x>1$ 时 $f(x)>0, f(2)=1$，

（1）求证：$f(x)$ 是偶函数；（2）$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

（3）解不等式 $f(2x^2-1)<2$

第 11 讲　函数图像的对称性

【知识梳理】

1、若函数 $y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 是偶函数，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像是关于 y 轴对称图形。

反之也成立：$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 的图像是关于 y 轴对称，则函数 $y=f\left(x\right)$ 是偶函数

2、若函数 $y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 是奇函数，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像关于原点对称图形。

反之也成立：$y=f\left(x\right)$ $\left(x\in D\right)$ 的图像是关于原点对称，则函数 $y=f\left(x\right)$ 是奇函数

3、设函数 $y=f\left(x\right), x\in D$，如果存在常数 $a\neq 0,$ 使得对于任意 $x\in D$ 都有 $f\left(a+x\right)=f\left(a-x\right)$ 恒成立, 则函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称

4、函数 $y=f\left(x\right), x\in D$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称的函数是：$y=f\left(2a-x\right)$

5、设函数 $y=f\left(x\right), x\in D$，如果存在常数 a,b 使得对于任意 $x\in D$ 都有 $f\left(a+x\right)+f\left(a-x\right)=2b$ 恒成立, 则函数 $f\left(x\right)$ 的图像关于点 $\left(a,b\right)$ 对称

6、函数 $y=f\left(x\right), x\in D$ 的图像关于点 $\left(a,b\right)$ 对称的函数是：$y=2b-f\left(2a-x\right)$

【精练题集】

1、函数 $f\left(x\right)=x^2+1$ 的图像与 $g\left(x\right)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，则 $g\left(x\right)=$ ________

2、函数 $f\left(x\right)=2^x+1$ 的图像与 $g\left(x\right)$ 的图像关于原点对称，则 $g\left(x\right)=$ ________

3、若函数 $y=x^2+\left(a+2\right)x+3, x\in\left[a,b\right]$ 的图像关于 $x=1$ 对称，则 $b=$ _______

4、设函数 $y=f\left(x\right)$ 对任意实数 x 均有 $f\left(2+x\right)=f\left(2-x\right)$,若方程 $f\left(x\right)=0$ 有四个根，则这四个根之和为_______________

5、已知 $f\left(x\right)$ 为定义在 R 上的奇函数, 且 $f\left(x\right)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称，则

$f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)+f\left(5\right)+f\left(6\right)=$ ___________

6、设函数 $y=f\left(x\right)$ 对任意实数 x 均有 $f\left(2+x\right)=f\left(2-x\right)$,若方程 $f\left(x\right)=0$ 有四个根，则这四个根之和为_______________

7、已知 $f\left(x\right)$ 为定义在 R 上的奇函数，且 $f\left(x+3\right)=f\left(x\right)$,，若 $f\left(1\right)=1$,
$f\left(2\right)=\dfrac{2a-3}{a+1}$,则 a 的值为__________

8、已知 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 为定义在 R 上的奇函数，且 $F\left(x\right)=af\left(x\right)+bg\left(x\right)+2$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上的最小值为5,则在区间 $\left(-\infty,0\right)$ 上函数 $F\left(x\right)$ 的最大值是________

9、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x & x\geq 0\\ 4x-x^2 & x<0\end{cases}$,若 $f(2-a^2)>f(a)$, 则实数 a 的取值范围是（　　）

A $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B $(-1,2)$　　C $(-2,1)$　　D $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

10、设 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a>0\right)$ 满足 $f\left(1-x\right)=f\left(1+x\right)$，则 $f\left(2^x\right)$ 和 $f\left(3^x\right)$ 大小关系是______________

11、已知 $f\left(x\right)$ 为定义在 R 上的奇函数，且满足 $f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$,当 $x\in\left(0,2\right)$ 时，
$f\left(x\right)=2x^2$,则 $f\left(7\right)=$ ________

12、已知函数 $f(x)$ 满足：①对任意 $x\in(0,+\infty)$，恒有 $f(2x)=2f(x)$ 成立；②当 $x\in(1,2]$ 时，$f(x)=2-x$. 若 $f(a)=f(2020)$，则满足条件的最小的正实数 a 是_____.

13、定义在 R 上的奇函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(3+x\right)=f\left(3-x\right)$,若当 $x\in\left(0,3\right)$ 时， $f\left(x\right)=2^x$, 则当 $x\in\left(-6,-3\right)$ 时， $f\left(x\right)$ 的解析式为　　　　　　　　　　(　　　)

$(A)2^{x+6}$　　　$(B)-2^{x+6}$　　　$(C)2^{x-6}$　　　$(D)-2^{x-6}$

14.设函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$ 的图像为 C_1，C_1 关于点 $A\left(2,1\right)$ 对称的图像为 C_2，C_2 对应的函数为 $g\left(x\right)$.
(1) 求 $g\left(x\right)$ 的解析式；(2) 若直线 $y=b$ 和 C_2 只有一个公共点，求 b 的值.

15、已知 $f\left(x\right)=m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 的图像与 $h\left(x\right)=\dfrac{1}{4}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2$ 的图像关于点 $A\left(0,1\right)$ 对称.

(1) 求 m 的值；(2) 若 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{a}{4x}$ 在 $\left(0,2\right]$ 上为减函数，求实数 a 的取值范围.

16.设曲线 C 的方程是 $y=x^3-x$, 将 C 沿 x 轴、y 轴正方向分别平移 $t,s\left(t\neq 0\right)$ 个单位长度后得到曲线 C_1. (1) 写出曲线 C_1 的方程；(2) 证明：曲线 C 与曲线 C_1 关于点 $A\left(\dfrac{t}{2},\dfrac{s}{2}\right)$ 对称；

(3) 如果曲线C与曲线C_1有且只有一个公共点，证明：$s=\dfrac{t^3}{4}-t.$

第 12 讲　函数的最值和值域

【知识梳理】

1.函数的最大值和最小值

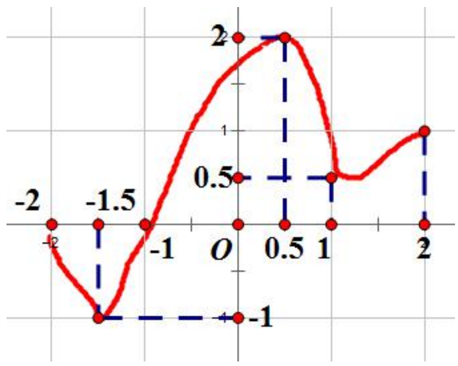
(1)设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值是 $f(x_0)$，如果函数定义域内任意 x，不等式 $f(x)\geq f(x_0)$ 都成立，那么 $f(x_0)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的最小值.

(2)类似地，如果函数定义域内任意 x，不等式 $f(x)\leq f(x_0)$ 都成立，那么 $f(x_0)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的最大值.

(3)函数的最大值与最小值反映在函数图像上是有最高点与最低点，常借助函数图像来直观地观察函数是否存在最值.

(4)求函数值域或最值：转化为几个熟悉的函数，应用基本不等式，利用函数的单调性求.

【基础巩固】



1.函数 $f(x)$ 在[-2,2]上的图像如图所示，求

(1)[-2,2]上的最值；　(2)[-1,1]上的最值；　(3)[0.5,2]上的最值.

2.(二次函数)已知 $f(x)=2x^2-4x+1$，求

(1)R 上的最值；　(2)[-2,3]上的最值；　(3)[-2,0]上的最值；　(4)[2,3]上的最值.

3.(双曲线型函数)(1)已知 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$，求

①$(0,+\infty)$ 上的最值；　②$[3,+\infty)$ 上的最值；　③[1,3]上的最值.

(2)已知 $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$，求

① $(0,+\infty)$ 上的最值； ② $[3,+\infty)$ 上的最值； ③ $[1,3]$ 上的最值.

【提高训练】

4.与二次函数有关的函数的最值

(1)求 $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$ 的最值.

(2)求 $f(x)=x+\sqrt{1+2x}$ 的最值.

(3)求 $f(x)=x+\sqrt{1-2x}$ 的最值.

5.分式型函数的值域

(1)求 $f(x)=\dfrac{2}{x^2-2x-3}$ 的值域； (2)求 $f(x)=\dfrac{1+2x}{1-x}$ 的值域.

(3)求 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+6}{x-1},x\geq 2$ 的值域； (4)求 $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1},x\geq 2$ 的值域.

(5)求 $f(x)=\dfrac{2x}{2x^2+1},-1\leq x\leq 1$ 的值域； (6)求 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ 的值域.

【拓展研究】

6.含参二次函数最值的讨论

(1)讨论 $f(x)=x^2-2ax+a^2+1$ 在[-1,1]上的最值.

(2)讨论 $f(x)=x^2-2x+2$ 在[a,a+1]上的最值.

7.含参双曲线型函数的最值讨论：讨论 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 在[1,5]上的最值.

8.其他形式

(1)已知 $x^2+y^2-2y-3=0$，求 $S=2x^2-y^2$ 的取值范围.

(2)若 α,β 是关于 x 的方程 $4x^2-4mx+2m+3=0$ 的两个实数根，求 $\alpha^2+\beta^2$ 的最小值.

第 13 讲　幂函数

【知识梳理】

1.幂函数的概念

(1)复习：正比例函数 $y=x$、反比例函数 $y=x^{-1}$、二次函数 $y=x^2$ 都可以统一写成 $y=x^k$ 的形式.

(2)幂函数：函数 $y=x^k(k\in Q)$ 叫做幂函数，注意底数 x 是自变量，k 是常数.

2.幂函数 $y=x^k(k\in Q)$ 性质归纳

(1)定点：恒过(1,1)

(2)奇偶性：设 $k=\dfrac{n}{m},m,n\in Z$ 且互素

①m、n 都是奇数，则 $y=x^{\frac{n}{m}}$ 是奇函数，图像关于原点对称；

②m 是奇数，n 是偶数，则 $y=x^{\frac{n}{m}}$ 是偶函数，图像关于 y 轴对称；

③m 是偶数，n 是奇数，则 $y=x^{\frac{n}{m}}$ 是非奇非偶函数.

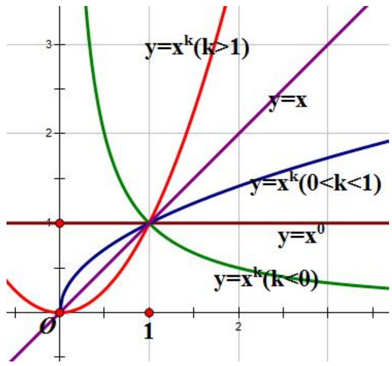
(3)图像位置

① $y=x^{k}(k\in Q)$ 在 $(0,+\infty)$ 一定有意义，因此第一象限一定有图像

②偶函数在第一、第二象限上有图像；

③奇函数在第一、第三象限上有图像；

④非奇非偶函数仅在第一象限(或原点)有图像.



(4)函数 $y=x^{k}(k\in Q)$ 在 R^{+} 上的单调性

① $k>1$ 时，$y=x^{k}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$x\in(0,1)$ 时图像在直线 y=x 下方，$x\in(1,+\infty)$ 时图像在直线 y=x 上方，当 x 充分大时，递增速度越来越快.

② $0<k<1$ 时，$y=x^{k}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$x\in(0,1)$ 时图像在直线 y=x 上方，$x\in(1,+\infty)$ 时图像在直线 y=x 下方，当 x 充分大时，递增速度越来越慢.

③ $k<0$ 时，$y=x^{k}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，两条渐近线是 x 轴、y 轴.

3.函数图像的平移与对称变换

(1)水平平移：$y=f(x)$ 的图像 $\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{向左平移}h(h>0)} y=f(x+h)\\ \xrightarrow{\text{向右平移}h(h>0)} y=f(x-h)\end{array}$ 的图像

(2)竖直平移：$y=f(x)$ 的图像 $\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{向上平移}h(h>0)} y=f(x)+h\\ \xrightarrow{\text{向下平移}h(h>0)} y=f(x)-h\end{array}$ 的图像

(3)对称变换：$y=f(x)$ 的图像 $\begin{array}{l}\xrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}} y=-f(x)\\ \xrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}} y=f(-x)\\ \xrightarrow{\text{关于原点对称}} y=-f(-x)\end{array}$ 的图像

(4)绝对值变换：$y=f(x)$ 的图像 $\xrightarrow[\text{复制}y\text{轴右边图像,并将其沿}y\text{轴翻折得到}y\text{轴左边的图像}]{\text{去除}y\text{轴左边图像}} y=f(|x|)$ 的图像

$y=f(x)$ 的图像 $\xrightarrow[\text{保留原}x\text{轴上方部分}]{x\text{轴下方部分沿}x\text{轴翻折到}x\text{轴上方去,去掉原}x\text{轴下方部分}} y=|f(x)|$ 的图像.

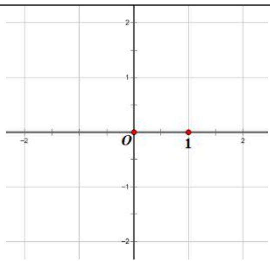
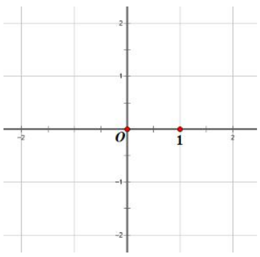
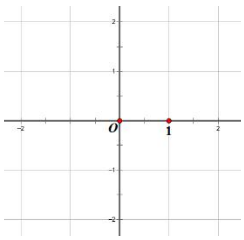
【基础巩固】

1.下列函数是幂函数的是________________

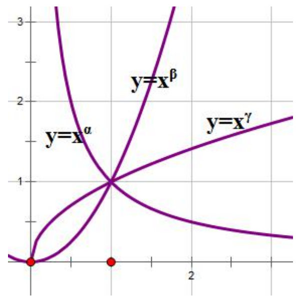
①$y=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；②$y=\sqrt[3]{x}$；③$y=3x^2$；④$y=5^x$；

⑤$y=x^2+x$；⑥$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$；⑦$y=x$；⑧$y=x^0$.

2.研究下列三个幂函数的性质

	$y=x^{\frac{2}{3}}$	$y=x^3$	$y=x^{-\frac{1}{2}}$
定义域			
奇偶性			
单调性			
值域			
图像			

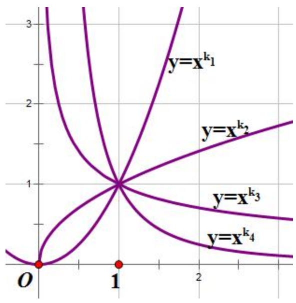
3.几个基本练习



(1)幂函数$y=x^{\alpha},y=x^{\beta},y=x^{\gamma}$图像如上图所示，比较$\alpha,\beta,\gamma$的大小.

(2)如下图所示曲线是幂函数$y=x^{k_i},k_i\in\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-2,2\}$在第一象限的图像

试求k_1,k_2,k_3,k_4.



(3)如果幂函数$f(x)$的图像经过$(3,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，求$f(9)$的值.

(4)利用幂函数的图像解不等式 $x^{-2} \geq \sqrt[3]{x}$.

4.待定系数法解决问题

(1)已知 $f(x)=(m^2+5m+7)x^m$ 是图像分布在第一、第三象限的幂函数，求 $f(x)$ 的解析式.

(2)幂函数 $f(x)=x^{m^2+2m-3}(m\in Z)$ 的图像关于原点对称，并且没有零点，求 $f(x)$ 的解析式.

(3)幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{3}{2}}(m\in Z)$ 在 R^+ 上是增函数，且在定义域上是偶函数，求 $f(x)$ 的解析式.

(4)幂函数 $f(x)=x^{m^2-2m-3}(m\in Z)$ 是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数，求 $f(x)$ 的解析式.

【拓展训练】

5.利用幂函数的图像解不等式

(1) $(2a+1)^{-\frac{2}{3}}<(a-3)^{-\frac{2}{3}}$； (2) $(a+2)^{-\frac{1}{3}}<(1-2a)^{-\frac{1}{3}}$.

(3)已知幂函数 $f(x)$ 的图像经过 $(3,\dfrac{\sqrt{3}}{9})$ ，求关于 x 的不等式 $f(x^2-1)>f(8)$

【提高研究】

6.综合题

(1)已知函数 $f(x)=x^{a^2+a-2}$ 和函数 $f(x)=ax^2+2a(a+1)x-1$ 在区间(0,-a)上都是减函数，求实数 a 的取值范围.

(2)已知函数 $f(x)=x^{-k^2+k+2}(k\in Z)$，且 $f(2)<f(3)$，

①求 k 的值；

②是否存在正数 p，使函数 $g(x)=1-p\cdot f(x)+(2p-1)x$ 在[-1,2]上的值域为 $[-4,\frac{17}{8}]$，若存在，求出这个 p 的值；若不存在，说明理由.

(3)已知函数 $f(x)=a-\frac{1}{x}(x>0)$

①判断函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的增减性，并予以证明；

②若 $f(x)<2x$ 在[1,+∞)上恒成立，求实数 a 的取值范围；

③若函数 $f(x)$ 在[m,n]上的值域也是[m,n]，求实数 a 的取值范围.

(4)设 $a\in R$，记函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

①设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围，并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$；

②求 $g(a)$ 的表达式.

第 14 讲　指数函数

【知识梳理】

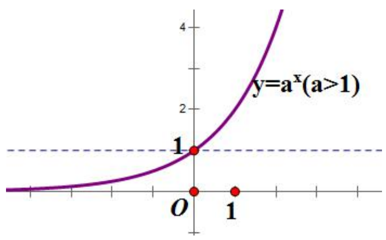
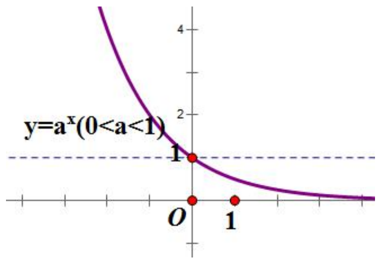
1.指数函数

(1)指数函数：一般地，函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$ 叫做指数函数.

(2)当 $x\in Q$ 时，$a^{x}(a>0,a\neq 1)$ 有完全确定的意义；当 $x\notin Q$ 时，取 x 的不足近似值，a^{x} 趋近于一个常数.

(3)指数的运算法则：
$$\begin{aligned} &a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}(a>0,m,n\in R)\\ &(a^{m})^{n}=a^{mn}(a>0,m,n\in R)\\ &(a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}(a,b>0,n\in R)\end{aligned}$$

2.指数函数的图像与性质

	$y=a^{x}(a>1)$	$y=a^{x}(0<a<1)$
大致图像		
定义域、值域	$D=R;A=(0,+\infty)$	
恒过定点	(0,1)	
渐近线	x 轴	
奇偶性	非奇非偶函数	
函数值范围	x>0，则 y>1；x<0，则 0<y<1	x>0，则 0<y<1；x<0，则 y>1
增减性	在 R 上是增函数	在 R 上是减函数
对称性	$y=a^{x}$ 与 $y=(\frac{1}{a})^{x}$ 的图像关于 y 轴对称.	

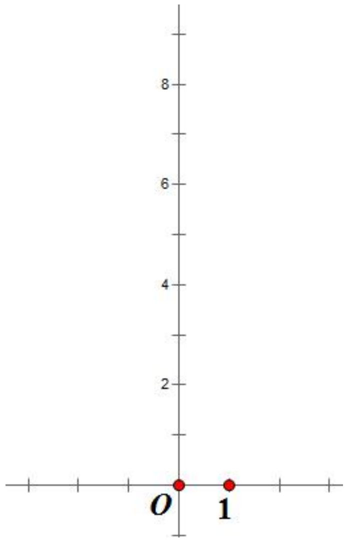
【基础巩固】

1.下列函数是指数函数的是____________

①$y=\pi^{x}$；②$y=2^{-x}$；③$y=(-\sqrt{3})^{x}$；④$y=x^{3}$；⑤$y=3^{x+2}$；⑥$y=3^{2x}$；⑦$y=-3^{x}$.

2.指数函数的图像与性质

在同一直角坐标系中，画出 $y_1=2^x$, $y_2=(\frac{1}{3})^x$ 的图像.



3.利用函数性质比较大小

(1)比较 $\pi^{1.732}$ 与 $\pi^{\sqrt{3}}$.

(2)如果 $a>1$，比较 $0.5^{\frac{a-1}{a}}$ 与 $0.5^{\frac{a}{a+1}}$.

(3)比较 $0.3^{0.4}$ 与 $0.4^{0.3}$.

(4)如果 $a>0,a\neq1$，比较 a^a 与 a.

(5)比较 $\frac{2^{2014}+1}{2^{2015}+1}$ 与 $\frac{2^{2015}+1}{2^{2016}+1}$.

4.指数函数的简单运用

(1)已知函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 在[1,2]上的最大值比最小值大 $\frac{a}{3}$，求实数 a 的值.

(2)已知关于 x 的方程 $2^x=\frac{a+1}{2-a}$，在下列情况下分别求实数 a 的取值范围.

①方程没有实数解；②方程只有正实数解；③方程有负数解.

【提高训练】

5.指数函数图像的平移变换和对称变换

(1)绝对值

①分别画出 $f(x)=2^x-2, g(x)=2^{|x|}-2, h(x)=|2^x-2|$ 的图像

②分别写出函数 $f(x), g(x), h(x)$ 的单调区间.

③如果关于 x 的方程 $g(x)=a, h(x)=b$ 都有两个实数根，分别求实数 a、b 的取值范围.

(2)若曲线 $|y|=3^x+2$ 与直线 $y=a$ 没有公共点，求实数 a 的取值范围.

(3)已知 $0<b<1$，函数 $y=b\cdot a^x+m$ 的图像不经过第一象限，求实数 a、m 的取值范围.

(4)若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1|\,(a>0, a\neq 1)$ 的图像有两个不同的交点，求实数 a 的取值范围.

(5)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, x\le 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, x>0\end{cases}$，求不等式 $f(x)>1$ 的解集.

【拓展研究】

6.指数函数与其他函数的复合

(1)值域与定义域

① $f(x)=5^{\frac{1}{2-x}}$； ② $f(x)=(\frac{1}{3})^{\sqrt{1-x}}$； ③ $f(x)=\sqrt{0.5^x-1}$； ④ $f(x)=\sqrt{1-2^x}$.

(2)与二次函数的复合

①求 $f(x)=(\frac{1}{2})^{x^2-6x+7}$ 的值域、单调区间；②求 $f(x)=2^x-4^x$ 在[-2,1]上的值域、单调区间.

(3)与分式函数的复合

①已知函数 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>0,a\neq 1)$，求它的定义域、值域、奇偶性、单调区间.

②写出函数 $f(x)=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的定义域、值域、奇偶性、单调区间.

第 15 讲　函数的对称性

【知识梳理】

(1)轴对称

①函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)$；

②函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称的函数的解析式 $y=f(2a-x)$；

③特别地，偶函数 $f(x)$ 关于直线 $x=0$ 对称 $\Leftrightarrow f(x)=f(-x)$.

(2)中心对称

①函数 $f(x)$ 关于点 (a,b) 中心对称 $\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b \Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b$；

②函数 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) 中心对称的函数的解析式 $y=2b-f(2a-x)$；

③特别地，奇函数 $f(x)$ 关于原点 O(0,0)对称 $\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0$.

【基础巩固】

1.(1)若函数 $y=f(x)$ 的图像关于点(1,0)对称，当 $x\le 1$ 时，$f(x)=x^2-1$，求函数 $y=f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的解析式.

(2)若函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\le 1$ 时，$f(x)=x^2-1$，求函数 $y=f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的解析式.

(3)已知函数 $f(x)=x^2-1$，且函数 $g(x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于点(3,4)对称，求 $g(x)$ 的解析式.

(4)已知函数 $f(x)=x^2-1$，且函数 $g(x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于直线 x=2 对称，求 $g(x)$ 的解析式.

【提高训练】

2.(1)试说明 $f_1(x)=2^x-2^{-x}$ 的图像是中心对称图形，$f_2(x)=x^2$ 不是中心对称图形.

(2)如果定义域为 R 的函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像都是关于点(a,b)中心对称，那么函数 $y=f(x)+g(x)$、$y=f(x)-g(x)$、$y=f(x)g(x)$、$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 中，哪些一定是中心对称图形，

哪些可能不是中心对称图形，分别说明理由

3.(1)已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+mx+m}{x}$ 的图像关于点(0,1)对称，求实数 m 的值.

(2) 已知函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的图像关于点 $(0,1)$ 对称，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)=x^2+ax+1$，求函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的解析式.

(3)在(1)、(2)的条件下，若对实数 $x<0$ 及 $t>0$，恒有 $g(x)<f(t)$，求实数 a 的取值范围.

【拓展研究】

4.设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, x\le 0,\\ f(x-1), x>0\end{cases}$，方程 $f(x)=x+a$ 有且只有两个不相等的实数根，求实数 a 的取值范围.

5.已知函数 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+a$，若点(2,1)关于 M(1,f(1))的对称点在函数 $f(x)$ 的图像上.

(1)求实数 a 的值；

(2)若点 $A(x_0,f(x_0))$ 在函数 $f(x)$ 的图像上，判断点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点 B 是否在函数 $f(x)$ 的图像上，并给出证明；

(3)是否存在实数 b，使得函数 $g(x)=bx^2-1$ 的图像与函数 $f(x)$ 的图像恰有 3 个公共点，且全部公共点都在直线 $y=4bx-4$ 上方，若存在，请求出实数 b 的取值范围；若不存在，试说明理由.

第 16 讲 反函数

【知识梳理】

一．定义：设式子 $y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数，定义域为 A，值域为 C，从式子 $y=f(x)$ 中解出 x，得到式子 $x=\varphi(y)$，如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过式子 $x=\varphi(y)$，x 在 A 中都有唯一确定的值和它对应，那么式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是 y 的函数（y 是自变量），这样的函数，叫做 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，即 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$，一般习惯上对调 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x,y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$。

（1）．反函数存在的条件：从定义域到值域上的一一映射确定的函数才有反函数；

（2）．原函数的定义域、值域分别是反函数的值域、定义域，

$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

几何语言：

$$\text{点}P\text{（}a,b\text{）在}y=f(x)\text{图象上} \Leftrightarrow \text{点}P'(b,a)\text{在}y=f^{-1}(x)\text{图象}$$

（3）．$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于 $y=x$ 对称.

二．求反函数的一般步骤

（1） 确定原函数的值域，也就是反函数的定义域

（2） 由 $y=f(x)$ 的解析式求出 $x=\varphi(y)$

（3） 将 x,y 对换，得反函数的一般表达式 $y=f^{-1}(x)$，标上反函数的定义域（反函数的定义域不能由反函数的解析式求得）

分段函数的反函数可以分别求出各段函数的反函数后再合成。

三．掌握下列一些结论

（1） 单调函数 $\Rightarrow$ 一一对应 $\Leftrightarrow$ 有反函数

（2） 若一个奇函数有反函数，则反函数也必为奇函数

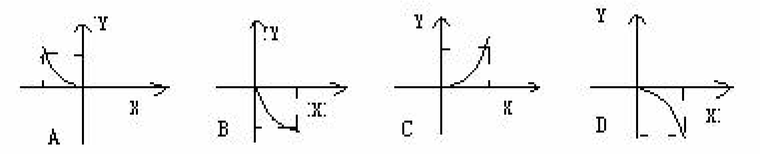
（3） 证明 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，只需证 $y=f(x)$ 的反函数和 $y=f(x)$ 相同。

【基础训练】

1 函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 反函数是 $f(x)^{-1}=\sqrt{x}-1\left(x\geq 0\right)$，求 $\boldsymbol{f(x)}$ 定义域

2.已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=3^{x}-1$，设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，则 $g(-8)=$__________.

3. $f(x)=1-\sqrt{1-x^{2}}(-1\leq x\leq 0)$. 则 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是（）



图（1）

4. $f(x)=2^{x}+b$ 的反函数是 $f(x)^{-1}$, $f(x)^{-1}$ 的图像过 Q(5,2).求 b.

【提高训练】

5.设 k>1，f(x)=k(x-1)(x∈**R**)．在平面直角坐标系 xOy 中，函数 y=f(x)的图像与 x 轴交于 A 点，它的反函数 y=f⁻¹(x)的图像与 y 轴交于 B 点，并且这两个函数的图像交于 P 点．已知四边形 OAPB 的面积是 3，则 k 等于 ( )

(A)3 (B)$\frac{3}{2}$ (C)$\frac{4}{3}$ (D)$\frac{6}{5}$

6.求 f(x)=$\frac{2x}{1+x}(x>-1)$ 图像与反函数图像交点坐标.

7. $y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$（）

（1）是奇函数，在（0，+∞）上是减函数

（2）是偶函数，在（0，+∞）上是减函数

（3）是奇函数，在（0，+∞）上是增函数

（4）是偶函数，在（0，+∞）上是增函数

【拓展研究】

8.（1）已知 $f(x)=4^{x}-2^{x+1}$，求 $f^{-1}(0)$的值.

（2）设函数 $y=f(x)$满足 $f(x-1)=x^2-2x+3$ $(x\leqslant 0)$，求 $f^{-1}(x+1)$.

9．判断下列函数是否有反函数，如有反函数，则求出它的反函数.

（1）$f(x)=x^2-4x+2(x\in R)$；

（2）$f(x)=x^2-4x+2(x\le 2)$.

（3）$y=\begin{cases}x+1,(x>0)\\x-1,(x<0)\end{cases}$

10．已知 $f(x)=\dfrac{ax+3}{x-1}$

（1）求 $y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域;

（2）若(2，7)是 $y=f^{-1}(x)$的图象上一点，求 $y=f(x)$的值域.

11．已知函数 $f(x+1)=x^2+2x(x>0)$，

（1）求 $f^{-1}(x)$ 及其 $f^{-1}(x+1)$；

（2）求 $y=f(x+1)$ 的反函数.

12．已知 $f\left(x\right)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$ (x≥1)，

（1）求 $f\left(x\right)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$，并求出反函数的定义域;

（2）判断并证明 $f^{-1}(x)$ 的单调性.

13．给定实数a，$a\neq0$，且$a\neq1$，设函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in R,且x\neq\dfrac{1}{a}\right)$．试证明：这个函数的图象关于直线$y=x$成轴对称图形．

第 17 讲 对数与对数函数

【知识梳理】

1.对数

（1）对数的定义：

如果 $a^b=N$（$a>0$，$a\neq1$），那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $\log_aN=b$.

（2）指数式与对数式的关系：$a^b=N\Leftrightarrow\log_aN=b$（$a>0$，$a\neq1$，$N>0$）.两个式子表示的 a、b、N 三个数之间的关系是一样的，并且可以互化.

（3）对数运算性质:

①$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$.

②$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$.

③$\log_aM^n=n\log_aM$.（$M>0$，$N>0$，$a>0$，$a\neq1$）

④对数换底公式：$\log_bN=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$（$a>0$，$a\neq1$，$b>0$，$b\neq1$，$N>0$）.

2.对数函数

（1）对数函数的定义

函数 $y=\log_ax$（$a>0$，$a\neq1$）叫做对数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域是（0，$+\infty$）.注意：真数式子没根号那就只要求真数式大于零,如果有根号,要求真数大于零还要保证根号里的式子大于零，底数则要大于 0 且不为 1

（2）对数函数的图象

底数互为倒数的两个对数函数的图象关于 x 轴对称.

（3）对数函数的性质:

①定义域：（0，+∞）.②值域：**R**.

③过点（1，0），即当 $x=1$ 时，$y=0$.

④当 $a>1$ 时，在（0，+∞）上是增函数；当 $0<a<1$ 时，在（0，+∞）上是减函数.

【基础训练】

1.函数 $f(x)=|\log_2 x|$ 的图象是

2.若 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)=\lg(x+1)$ 的反函数，则 $f^{-1}(x)$ 的值域为____________________.

3.已知 $f(x)$ 的定义域为［0，1］，则函数 $y=f[\log_{\frac{1}{2}}(3-x)]$ 的定义域是__________.

4.若 $\log_x \sqrt[7]{y}=z$，则 x、y、z 之间满足

A.$y^7=x^z$　　B.$y=x^{7z}$

C.$y=7x^z$　　D.$y=z^x$

5.已知 $1<m<n$，令 $a=(\log_n m)^2$，$b=\log_n m^2$，$c=\log_n(\log_n m)$，则

A.$a<b<c$　　B.$a<c<b$

C.$b<a<c$　　D.$c<a<b$

6.若函数 $f(x)=\log_a x$（$0<a<1$）在区间［a，$2a$］上的最大值是最小值的 3 倍，则 a 等于

A.$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\dfrac{1}{4}$　　D.$\dfrac{1}{2}$

7.函数 $y=\log_2|ax-1|$（$a\neq 0$）的对称轴方程是 $x=-2$，那么 a 等于

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.$-\dfrac{1}{2}$　　C.2　　D.-2

8.函数 $f(x)=\log_2|x|$，$g(x)=-x^2+2$，则 $f(x)\cdot g(x)$ 的图象只可能是

9.设 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的反函数，若［$1+f^{-1}(a)$］［$1+f^{-1}(b)$］$=8$，则 $f(a+b)$ 的值为

A.1　　B.2　　C.3　　D.$\log_2 3$

10.方程 $\lg x+\lg(x+3)=1$ 的解 $x=$____________________.

【提高训练】

【例 1】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, x\geq 4,\\ f(x+1), x<4,\end{cases}$ 则 $f(2+\log_2 3)$ 的值为

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{6}$　　C.$\frac{1}{12}$　　D.$\frac{1}{24}$

【例 2】 求函数 $y=\log_2|x|$ 的定义域，并画出它的图象，指出它的单调区间.

【例 3】 已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}[3-(x-1)^2]$，求 $f(x)$ 的值域及单调区间.

【例 4】已知 $y=\log_a(3-ax)$ 在［0，2］上是 x 的减函数，求 a 的取值范围.

【例 5】设函数 $f(x)=\lg(1-x)$，$g(x)=\lg(1+x)$，在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域内比较 $|f(x)|$ 与 $|g(x)|$ 的大小.

【例 6】 求函数 $y=2\lg(x-2)-\lg(x-3)$ 的最小值.

【例 7】在 $f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$f_2(x)=x^2$，$f_3(x)=2^x$，$f_4(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ 四个函数中，$x_1>x_2>1$ 时，能使 $\frac{1}{2}$［$f(x_1)+f(x_2)$］$<f(\frac{x_1+x_2}{2})$ 成立的函数是

A.$f_1(x)=x^{\frac{1}{2}}$　　B.$f_2(x)=x^2$　　C.$f_3(x)=2^x$　　D.$f_4(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$

【拓展创新】

1.若 $f(x)=x^2-x+b$，且 $f(\log_2 a)=b$，$\log_2[f(a)]=2$（$a\neq1$）.

（1）求 $f(\log_2 x)$ 的最小值及对应的 x 值；

（2）x 取何值时，$f(\log_2 x)>f(1)$ 且 $\log_2[f(x)]<f(1)$？

2.已知函数 $f(x)=3^x+k$（k 为常数），$A(-2k,2)$ 是函数 $y=f^{-1}(x)$ 图象上的点.

（1）求实数 k 的值及函数 $f^{-1}(x)$ 的解析式；

（2）将 $y=f^{-1}(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(3,0)$ 平移，得到函数

$y=g(x)$ 的图象，若 $2f^{-1}(x+\sqrt{m}-3)-g(x)\geqslant1$ 恒成立，试求实数 m 的取值范围.